FILOSOFISKA NOTISER

Årgång 3, Nr 1, April 2016

ISSN: 2002-0198

Hemsida: www.filosofiskanotiser.com

De Facto and De Jure Dependence

Paul Schollmeier

Abstract
A prominent philosopher of science finds inspiration in Plato for a new theory of causal dependence, which he calls "de facto dependence". He reminds us that Socrates distinguishes between a cause and that without which a cause would not be a cause, and he argues that the that without which, to use a shorter locution, is a cause maker. I wish to argue that the that without which enables us only to distinguish causal dependence of two kinds, which I call "de facto dependence" and "de jure dependence." With an application of Mill's methods, I nonetheless show that there are de facto and de jure cause makers, and that de facto cause makers can be of two kinds.

1. Introduction

Analytic philosophy is no longer as chauvinistic or isolationist as it once was! A prominent philosopher of science now takes inspiration from Plato for a new theory of causal dependence, which he calls "de facto dependence."[1] Unfortunately, this new theory, despite its initial persuasiveness and obvious sophistication, runs counter to some ordinary intuitions of ours, less sophisticated perhaps but equally persuasive.[2] I wish to suggest with the present essay that the inspiration is well taken, but that the theory in question overlooks a crucial distinction about causal dependence. Causal dependence, we shall see, is of two varieties. These varieties I hereby dub "de facto dependence" and "de jure dependence."

I wish to argue, more specifically, that Plato has indeed hit upon an important fact about causality, but that this fact is not what one might initially think it to be. Socrates in the *Phaedo* famously distinguishes on the last day of his ill-fated career between a cause and that without which a cause would

[1] Yablo (2002), where he broaches the topic; and Yablo (2004), where he expands on the topic.
[2] Francis Longworth offers numerous counterexamples. See Longworth (2005).

not be a cause.[3] The that without which, to use a shorter locution not uncommon in the Greek, cannot be a cause maker de facto or de jure in any usual sense. The that without which enables us only to distinguish de facto from de jure dependence.[4] But with an application of Mill's methods, I shall show that there are de facto and de jure cause makers, and that de facto cause makers can be either of two kinds. These two kinds, I would urge, we must take care not to confuse with the that without which and not to conflate with each other.

2. The That Without Which

Let us begin our analysis with a closer look at the passage in the *Phaedo*. I intend to use the passage to explicate, albeit briefly, Plato's concept of causality and to show how his concept, despite its antiquity, can shed a new and interesting light on the modern concept of causality, which we are more accustomed to employ. I shall then be able to advance our understanding of causal dependence, both de facto and de jure.

We might best see how Socrates conceives of a cause if we consider an example that he himself uses to explain what a cause is. The primary example that he offers is his own action, or rather his inaction, in his prison cell on the day of his execution. He introduces the very distinction between a cause and that without which to explain why he does not make an attempt to escape from his cell but chooses instead to remain on death row and to accept his fate.[5]

To explain why he remains, Socrates distinguishes true causes from causes apparently false. The true causes of his remaining in his cell are, he informs us, that the Athenians believe to condemn him to be better, and that he believes to accept their condemnation to be better.[6] The false cause of his staying is his body with its bones and sinews and its muscles and skin. With their contractions and extensions, his sinews might, he concedes, seem to bring about his posture of sitting on his bed with his legs hanging down.[7]

---

[3] Plato (1914b, p. 99b). For present purposes I assume no relevant philosophical differences between Plato and Socrates in the dialogues.

[4] Compare Yablo (2002, pp. 131-132); also Yablo (2004, pp. 119-120).

[5] Socrates offers a second example, which is his discussion of philosophy in his cell with his friends (*Phaedo* 98d-e). But I omit it because it is amenable to the same analysis.

[6] Plato (1914b, p. 98e).

[7] Plato (1914b, p. 98c-d).

Socrates explains to his companions that one must distinguish what a cause is from that without which a cause, presumably a true one, would not be a cause.[8] The causes of doing what he does, he rather clearly implies, are his understanding and his choice of what is best.[9] The that without which is his body and its organs. He could not do what he does without his bones and sinews, he admits. But, he argues, these organs cannot be the causes of his actions. If they were, they would long ago have carried him off to Megara or Boeotia because of their opinion of what is best.[10]

What does he mean? We might perhaps best view the distinction between a cause and the that without which as a distinction between form and matter, to use more traditional terminology. After all, what Socrates chooses is a form that, through his own efforts, he can impose on his body. His intention is, before he acts on it, a form that his body can have, and his remaining seated, after he acts, is a form that his body does have. His intention thus becomes embodied or, one might say, enmattered. The that without which, then, is the matter within which a form can come to exist. In this instance the matter is a human body with its various organs.[11]

I would point out, however, that a cause becomes fully a cause only if and when it has its effect. True, a cause can be actual in one sense without having an effect. It does exist. Socrates may formulate an intention and choose to stay in his cell. But is a cause fully a cause if it has not had an effect? I think not. A cause is more fully actual and actual in another sense only if and when it brings about its effect. It then exists as a cause bona fide, we might say. Socrates must not only choose to act on his intention but also be able to act on it.[12]

Perhaps we might more obviously distinguish between a potential cause and an actual cause. A potential cause, actual in the first sense, has not yet had an effect, but an actual cause, actual in the second sense, has had an effect. In other words, a potential cause has a that without which, but its effect does not yet have a that without which. An actual cause and its actual

[8] Plato (1914b, p. 99b).

[9] Plato (1914b, p. 99a-b).

[10] Plato (1914b, p. 98e-99a).

[11] Form and matter are relative terms, of course. Our body with its organs is also a form imposed upon matter less organized, such as tissues of various kinds, and these tissues in turn are forms for matter in other varieties, such as cells and their organelles, and so on down.

[12] Philosophers have traditionally distinguished actuality in these two senses as first and second actuality.

effect both have a that without which. A cause and effect, when both are actual, are, in other words, both enmattered.

I concede that Socrates presents a concept of causality that has fallen out of favor and seems antiquated even to some Plato scholars. His concept is what we would today call a teleological cause. Socrates explains that he understands what is better in his unfortunate situation, and that he chooses to act for what he takes to be better. The concept even appears anthropomorphic when applied to events other than human actions. His suggestion, perhaps humorous, that his bones and sinews might have their own opinion about what is best, would surely carry the implication that it is.[13]

A teleological cause we most often think of as an explanation for a change in substance. That is, a teleology purports to explain why a thing comes into existence and why it goes out of existence. Indeed, Socrates relates that he read Anaxagoras with great eagerness because he had the mistaken impression that Anaxagoras in his theory employed understanding as a cause to explain the existence of all things.[14] He in fact advances his own concept of teleology, in part at least, to explain changes of this kind.[15]

But Socrates also uses his concept of a cause, though teleological, to explain a change that is not a change of substance. His very example of staying in his cell concerns a change of place or, more explicitly, motion and rest. His understanding and his choice are, he asserts, the causes that explain why he remains and accepts his execution. His understanding forms his intention, and his intention is his end of staying and dying. His choice obviously brings about his intended end.

That this ancient concept of causality is teleological is not particularly relevant for our purposes, however. Especially when applied to motion and rest, this teleological concept very much resembles our modern mechanical concept. There is an antecedent or cause, and there is a consequent or effect. The antecedent for Socrates is the choice to act on his intention to remain in his cell and to accept a death penalty, and the consequent for him is to stay

---

[13] Wiggins agrees that the concept is teleological. He argues that Socrates uses understanding and choice as a model to explain physical motion. See Wiggins (1986, esp. p. 10).

[14] Plato (1914b, p. 97b-98b).

[15] Plato (1914b, p. 95e-96a).

and ultimately to drink the hemlock. His choice keeps him where he is and eventually results in his death, despite the efforts of his friends.[16]

We might think of the antecedent merely as a vector. That is, we may view the antecedent as a form that is potential and the consequent as a form that is actual. Socrates' example can serve once more. His belief that to stay and to accept a death penalty is better, is a potential cause. His belief is merely an intention or a concept only. But his choice to remain in his cell and to die is a cause become actual when he stays and drinks the poison. His concept of remaining and dying becomes enmattered in his body.

We might say, then, that Plato's distinction between a cause and that without which is a distinction between a form and its matter. A cause is actual in one sense when it has a that without which. It has a potentiality that is actual. But a cause cannot be actual in another sense unless and until its effect also has a that without which. It then has a potentiality that is actual in its effect.

3. Causality De Jure and De Facto

We are now prepared to distinguish de facto and de jure causation. To do so, let us consider an example recurrent in the literature involving two characters named Suzy and Billy. These characters are apparently juveniles with a delinquent tendency. They like to break windows by throwing rocks at them. To simplify for the moment, we shall consider only Suzy, who appears to have a quicker arm than Billy. Though they both throw, she always throws her rock slightly before he throws his.

What happens in the example? Simply put, Suzy picks up a rock and throws it at a window. Her rock strikes the window, and the window breaks. What is the cause of the broken window? The cause is obviously the thrown rock.[17] If the rock had not been thrown, the window would not have been broken. What is the that without which? The that without which is both the

[16] The consequent in this example is more obvious when we make the death penalty explicit, because to stay in his cell is inaction, but to drink hemlock is action. But by extending it we have also transformed our example from one of remaining at rest into one of destroying a substance. By his action Socrates ceases to exist.

[17] Or, at least, the cause most proximate is the thrown rock. A dare, perhaps, the intention to throw, a glance at the rock on the ground, or the rock in hand would be less proximate causes. Similar analyses would apply to these more remote antecedents, but these analyses would present needless complications for our purpose.

rock and ultimately the window.[18] If there were no window, the rock would have ever remained a potential cause and would never have become an actual cause. Why? Its effect would not have been embodied. The rock becomes an actual cause only if and when the window breaks.[19]

I should point out that this example of breaking a window does exhibit an undeniable, but inessential, difference from the example of staying in place. In the present example the cause and the effect occur in different objects. The rock is one thing, and the window another. The rock has its effect not on itself but on the window. In the previous example the cause and effect occur in the same object. They both are in the same person. Socrates chooses to stay in his cell, and stay he does.

De jure causation is, I wish to contend, that an antecedent precedes a consequent as a general law. A general law, familiar to all since childhood, is that a rock, if thrown with sufficient accuracy, causes a broken window. This law is admittedly not terribly general, not even as general as the laws of physics found in high school textbooks. The antecedent of this law applies to all throwable rocks of sufficient heft. These rocks would include Suzy's rock as well as Billy's. The consequent applies to all ordinary, frangible, windows successfully thrown at. These windows would be all those broken.

De facto causation is that a given antecedent precedes a given consequent as a particular fact. Suzy's rock causes the broken window in question. Billy's rock, though thrown, does not. What is the difference between Suzy's rock and Billy's rock? Suzy's rock has an effect that is enmattered. Its matter is the that without which. Without an enmattered effect, Suzy's rock would be only a potential cause de facto. But Suzy's rock is an actual cause de facto as soon as its effect materializes. Billy's rock remains a de facto potential cause.

We now see how de jure causation differs from de facto causation. De jure causation is an abstract connection, which can be more or less general. But causation de facto is a here-and-now connection, which can be only particular. Consider a neoclassical example. A de jure causal relationship

[18] Again, the window is the most proximate that without which. A less proximate that without which would be the glass pane or simply glass.

[19] Recall our distinction between first and second actuality. The rock, when thrown, is an actual cause in the first sense, and it becomes an actual cause in the second sense when it breaks the window.

would be the law that bread nourishes human beings. That this loaf nourishes me is a de facto causal relationship.[20]

We might also note that a de jure connection can hold with unexceptional necessity, at least as far as we presently know. It simply does not appear to admit of a single exception. But a de jure connection can also hold with probability, which can be greater or lesser. It appears to have exceptions, which can be few or many.[21]

A de facto causal connection can be only probable, however. But are not some de jure connections necessary? you may ask. How can their de facto counterparts be only probable? Any particular causal connection, I would answer, can always encounter other particular causal connections. These various connections can intervene, they can contravene, or they can subvene, as we shall see.

4. Dependency De Jure and De Facto

But does our distinction between de facto and de jure causation enable us to distinguish de facto from de jure causal dependence and eventually to explain de facto dependence? I am about to argue that it does. As is de jure causality, so is de jure dependence abstract and general. De jure dependence is merely our conception of the necessity or the probability in a connection between a cause and an effect. In other words, its cause and effect are not actual because they have no that without which. The dependence of an effect on its cause is not enmattered. The dependence is a general matter of fact, we might say, which holds in our concept of it.

As is de facto causality, so, too, de facto dependence is particular and concrete. De facto dependence is our perception of the necessity or the probability in a given connection between a given cause and effect. In other words, its cause and effect are actual because each does have a that without which. The dependence of an effect on its cause is enmattered. The dependence is a particular matter of fact, which holds in our percept of it.[22]

Consider the example of Suzy again. Thrown rocks are de jure causes of broken windows. Broken windows depend de jure on thrown rocks, though

[20] Compare, e.g., Hume (1975, pp. 32-34). In this passage Hume is concerned to show that this very distinction gives rise to the problem of induction.

[21] See, e.g., Hume (1975, pp. 57-59).

[22] The distinction between general and particular matters of fact I borrow from Hume. He uses it to differentiate the moral sciences. See Hume (1975, pp. 164-165).

not on this cause alone.[23] But de jure dependence does not tell us whether a de facto cause exists or whether a de facto effect exists. True, a thrown rock can break a window. But did anyone throw a rock? Was any window struck? We have no way of knowing de jure.

But Suzy's rock at a given time and place is the de facto cause of a broken window at a given time and place. This broken window de facto depends on her thrown rock. If she had not thrown her rock then and there, Suzy would not have broken this window when and where she did.[24]

I would now compare this concept of de facto dependence with the concept recently presented in the new theory inspired by Plato. In the theory Stephen Yablo uses the example of Suzy and Billy to explain de facto causal dependency. He agrees that Suzy's rock is the de facto cause of the broken window, and that Billy's rock, though thrown, is not the de facto cause. He argues that the broken window depends solely on Suzy's rock. If Suzy had not thrown, the window would not have been broken. But why is her rock the cause? He states that her rock is the cause because Billy's rock does not hit the window. We must hold fixed, he claims, the fact that Billy's rock does not hit its mark.[25]

Citing the *Phaedo*, he explains why he takes the broken window to depend on Suzy's thrown rock alone. Billy's rock, he argues, is not a cause but a that without which. His rock does not contribute to breaking the window, but it does makes something else the cause of the broken window. His rock is a cause maker, he claims. It makes the broken window depend on Suzy's rock. The fact that Billy's rock does not strike the window puts the broken window in need of Suzy's rock.[26]

Obviously, the crucial difference between this analysis of de facto dependence and our analysis lies in the concept of the that without which. On our analysis the that without which is the that within which a cause exists. A de jure cause becomes a cause de facto only if and when it is enmattered.

---

[23] I assume for the sake of simplicity no other causes of broken windows. But other missiles, for example, can easily beak windows. Errant baseballs and BB's spring immediately to mind.

[24] We might put these conceptions of de jure and de facto dependence more formally. Let upper-case letters represent a de jure cause and effect, and lower-case letters a de facto cause and effect. Then, (DJ) C is a cause of E iff E depends on C; and (DF) c is a cause of e iff e depends on c. Compare Yablo (2002, p. 138); or Yablo (2004, pp. 126-127).

[25] Yablo (2002, p. 130).

[26] Yablo (2002, p. 131).

Socrates, for example, cannot remain seated on his prison bed and accept his sentence without his body and its organs.[27]

The intention to acquiesce in a court sentence, I would argue, and the choice to do so are merely causes de jure unless and until someone accepts the intention and makes the choice. The intention and choice are then causes de facto. Any person who has been condemned can embody these de jure causes and make them causes de facto, though apparently not all do so with equanimity.[28]

Socrates himself implies that intentions and choices are causes de jure. In his defense at his trial he is good enough to caution his fellow citizens that they cannot do away with his philosophical career as a de jure cause. However much they may wish, they will find themselves unable to escape the philosophical questions that he is accustomed to ask of them. Why? He explains to them that, even if they execute him, others will soon arrive to take his place and to perform his philosophical function.[29]

Socrates would thus suggest that a de jure cause, such as a philosophical function, is an immortal cause, if you will allow the linguistic license. Indeed, his cause lives on to this very day. But, unfortunately, his plea falls on deaf ears. His accusers and jury apparently think that they can rid themselves of his de jure cause merely by doing away with its that without which. They were quite pleased to dispense with him as a de facto cause when they condemned him and executed him.

Similarly, I would argue that no juvenile can throw a rock at a window without a body and its organs and without a rock to throw. The intention to throw a rock and to break a window and the choice to do so are again causes de jure unless and until someone accepts the intention and makes the choice. The intention and choice then become causes de facto. They become causes de facto whoever picks up a rock and breaks a window with it. Any person, juvenile or not, can succumb to the temptation, though adults usually do not. The perpetrator can be either Suzy or Billy.[30]

On the other analysis a cause would appear to be a cause de facto only if and when another cause fails. The that without which is apparently a cause

[27] Plato (1914b, p. 99a).

[28] Plato (1914b, pp. 116e-117a).

[29] Plato (1914a, p. 39c-d).

[30] I assume intentionality in at least the second degree, to use a legal term. This assumption has the advantage of a more ready comparison of Socrates with Suzy. But a similar analysis would still apply to Suzy, mutatis mutandis, if she threw without intention, say in anger.

that has no effect. How might this concept of a that without which apply to Socrates? I am not entirely sure. Socrates clearly implies that he considers the that without which to be his body.[31] But he also clearly asserts that his body is not the cause of this action. He informs us that, if they were the causes, his bones and sinews would have been long gone for Megara or Boetia.[32] His body apparently would desire nothing more than to save its skin.

Could he mean that his body is not be the cause of his action because it is a cause that failed? If so, the that without which would indeed appear to be a failed cause. But Socrates rules out this possibility, too. The that without which is ultimately not a cause at all, he contends. His disappointment with Anaxagoras and his colleagues arises because they think not that a power, which he thinks to be good, places things where they are, but that matter does. They think that a whirlwind or an air layer keeps the earth below the heavens, for example.[33]

Admittedly, Socrates has a geocentric rather than a heliocentric view of our planetary system. But this detail aside, his etiological point is clear enough. I take him to argue that a cause, or power, is a form that can have an effect on matter. Consider, for example, a modern physical cause. Gravity is a field, I understand, and a field is a cause that has an effect one cannot account for with mechanical causes. Gravity is thus a formal power that keeps the earth and the other planets in their elliptical orbits. That it does so is probably a good thing, I would add.

Or consider Suzy and her rock again. Could Suzy's rock be the cause of the broken window? Not all by itself. The cause of the broken window is rather a form that Suzy imparts with her intention and choice to throw the rock. The rock, left by itself, would have remained inert upon the ground. It is merely a that without which. Suzy makes her intention and choice the de facto causes of the broken window when she picks up the rock and throws it. Her intention and choice become enmattered. But she would find that any rock, if of sufficient weight and proximity, would suit her purpose equally well.

Perhaps the other analysis might require that Socrates cannot sit in his cell and await his execution unless and until someone else does not. But this interpretation is far-fetched and unlikely. I would ask, Must one de facto

[31] Plato (1914b, p. 99a-b).

[32] Plato (1914b, p. 98e-99a).

[33] Plato (1914b, p. 98b-c, 99b-c).

cause succeed only if another de facto cause fails? Could Socrates choose to remain in prison only if another prisoner fails to remain? Cannot someone accept a court judgment without another defendant being acquitted or another prisoner escaping? Surely, Socrates could choose to remain in prison even if there were no other prisoners. As far as we know, he in fact did.

Could not Suzy, too, have acted on her own? Cannot Suzy pick up a rock and throw it and break a window without someone else attempting and failing to do so? Simply put, Suzy could have thrown a rock and broken the window even if Billy had not thrown. She could have broken the window if he had merely bent down and had not yet picked up a rock. Or if he had stood idly by, or if he was not even present.

More remains to be said, obviously. Why might one think that Suzy's rock is the de facto cause of the broken window because Billy's rock passes through the empty window frame? To see why this proposition might seem plausible, we shall have to delve deeper into an analysis of de facto and de jure causality with a look at Mill's methods.

5. De Jure and de Facto Cause Makers

I shall now show that we run the risk of misconceiving de facto dependence if we fail to recognize both de facto and de jure dependence. One can apply inductive methods appropriate for de jure causality to de facto causality. An inductive method employed to discover a conceptual dependency can serve to uncover a perceptual dependency, in other words. But one can also very easily misapply a de jure inductive analysis to de facto causality. That one might mistake a de jure epistemological supposition for a de facto ontological supposition, is my position.

Let us briefly recall Mill's methods. For our purpose we need consider only the method of agreement and the method of difference. The method of agreement compares different instances of an effect, say, to determine what antecedent they might have in common. Its presupposition is that, if the instances have an antecedent in common, the common antecedent is the cause of the effect under scrutiny.[34] To take Mill's schematic example, let a be an effect. If we compare consequents a b c and a d e, and if we discover that A B C and A D E are their antecedents, we can then conclude that A is the cause of a. Neither B and C nor D and E can be causes, because these antecedents were not present in both instances.[35]

[34] Mill (1973, p. 390).

[35] Mill (1973, p. 389).

The method of difference rests on the presupposition that, if an instance with an effect, say, does not have an antecedent in common with another instance without the effect, the antecedent in which the instances differ is the cause of the effect in question. This method thus seeks to compare an instance with an effect with an instance without the effect. Consider Mill's schematic example again, and let a again be an effect. If we compare the consequents a b c and b c, and if we discover that A B C and B C are their antecedents, we can conclude that A is the cause of a. Neither b nor c can be the cause because these antecedents were present when the effect was not.[36]

How do these methods apply to de facto and de jure causal dependence? Consider the case of our juveniles and their delinquent activity. We all know that thrown rocks are de jure causes of broken windows. But how do we know? If at all experienced in the ways of delinquency, we have inductive evidence readily available for our analysis. We can use the method of agreement. We need only compare known instances of broken windows and their antecedent circumstances. We will quickly discover that their antecedents all agree on the fact that a rock was thrown and struck the window.[37]

We can also use the method of difference. We need simply compare an instance of a broken window and its antecedent circumstances with an instance of an unbroken window and its antecedents. We shall soon discover that the antecedents of the broken window differ from those of the window not broken. They differ in that a rock was thrown at and struck the broken window. But no rock, though perhaps thrown, struck the unbroken window.

Of course, we might, if so inclined, indulge ourselves with an experiment or two. We would find the method of difference of use for this purpose. We need only look for unbroken windows, preferably in a building abandoned and condemned, and we could then throw rocks at them. I am confident that we would discover that our rocks, if thrown with sufficient accuracy, would break the windows. These rocks would constitute the salient difference between the instances of unbroken windows and those of broken windows.

What about de facto causes? We agree that Suzy's rock is the de facto cause of the broken window. But how do we know that it is? We can use the method of difference again. We may compare the preceding instance in

[36] Mill (1973, p. 391).

[37] For the sake of simplicity I again ignore other causes of broken windows. Mill recognizes this complication as the plurality of causes, and he discusses its consequences for induction, especially for the method of agreement. See Mill (1973, pp. 434-439).

which the window is unbroken with the succeeding instance in which the window is broken. If we do, we can see that these two instances agree on all salient circumstances save one. They differ in the obvious fact that Suzy's rock was thrown at and struck the window. In the first instance this fact was not present, but in the second instance it was present.[38]

What, then, do Mill's methods tell us about causal dependence? His methods tell us that by eliminating other possible causes we can discover both de jure causal dependencies and de facto causal dependencies. We can learn, for example, that thrown rocks are de jure causes of broken windows. That is, broken windows depend on thrown rocks. We can also learn that Suzy's rock is the de facto cause of the broken window in question. This broken window depends on her thrown rock.

I would now draw your attention to a crucial fact. Only epistemologically do Mill's methods allow us to determine which antecedent circumstances are causes. With an induction we can discover causal dependencies both de jure and de facto. In other words, we can make known causal connections both conceptual and perceptual. But these inductive methods do not permit us to determine ontologically which antecedents are causes. An induction would obviously vitiate its conclusion if it were somehow to make an antecedent bring about or not bring about a consequent.[39]

I would also note that Mill's methods only determine which antecedent circumstances are causes. With an induction we can discover de jure and de facto causal dependencies between antecedents and consequents. But an induction does not uncover conceptual or perceptual connections among the antecedents in question. An addition induction would be necessary to make known any connection de facto or de jure among them.

We can now begin to see why Yablo might contend that Suzy's rock is the de facto cause of the broken window because Billy's rock makes it the cause.

---

[38] Mill uses a similar example to illustrate the method of difference. We know in this way that a healthy man was killed by a gunshot through the heart. The instances before and after his death agree on all circumstances except one, and this one circumstance is the gunshot wound. See Mill (1973, p. 391).

[39] True, we can and do manipulate antecedents to set up an experiment for an induction. But any induction, once we set up our experiment, has the purpose of allowing us merely to conceive or to perceive a causal connection. Besides, we can also perform an induction through observation alone when we have no control at all over antecedents. Mill notes that the method of difference is best for experimentation, but that the method of agreement is best for observation. See Mill (1973, pp. 392-394).

This contention rests, I think, on a misapplication of inductive methods. One could say that the methods employ cause makers. The methods of agreement and of difference work by the elimination of antecedents, and the antecedents eliminated make another antecedent the cause. But the eliminated antecedents make the remaining antecedent the cause in an epistemological sense only. They are epistemological cause makers in the sense that they make known which antecedent is the cause.

Consider our juveniles again. We know by induction that Suzy's rock is the de facto cause of the broken window, and we know that Billy's rock is not. But do we know that Suzy's rock is the de facto cause because Billy's rock is not? We do not. Our induction establishes only that there is a de facto connection between one antecedent and the consequent, and that there is no de facto connection between another antecedent and the consequent. It shows that Suzy's rock broke the window, and that Billy's rock did not.

Our induction does not establish a de facto connection between one antecedent and another. It does not show that there is a causal dependency of Suzy’s rock on Billy's rock. But how else could Billy's rock be a cause maker in an ontological sense? The antecedents eliminated with our induction have no known effect on the antecedent not eliminated. We would need at least one more induction to make known a causal dependency of one antecedent on another.

One can easily mistake a de jure cause maker for a de facto cause maker. A resemblance and an ambiguity are in play. A de jure induction and a de facto induction are similar in that they both eliminate antecedents. But the antecedents eliminated are dissimilar with regard to their causal status. A de jure antecedent that is eliminated differs in kind from the antecedent discovered to be the cause, but a de facto antecedent that is eliminated differs in number from the antecedent that is the cause. That is, an eliminated de jure antecedent can be only of a kind that cannot cause the effect in question, but an eliminated de facto antecedent can be of a kind that can cause the effect but simply does not cause it.[40]

[40] Actually, I am simplifying again. An eliminated de jure antecedent differs both in kind and in number from other antecedents. But the difference in kind is primary because a de jure induction seeks to establish a general law. An eliminated de facto antecedent can also differ from other antecedents both in kind and in number. To take Mill's example, a detective might wish ascertain whether a murder victim was shot through the heart with this rifle or this pistol. But the difference in number is primary because a de facto induction seeks to establish a particular fact.

A de jure cause cannot ontologically cause an effect, in other words. But a de facto cause can ontologically cause an effect. To mistake a difference in kind for a difference in number would seem to make one cause different in number ontologically different in kind from another cause. In other words, the mistake would simply seem to make ontologically incapable a cause capable of an effect.

We can now see how one might mistake for a de jure cause maker a de facto cause maker. Neither a de jure antecedent eliminated epistemologically nor a de facto antecedent eliminated epistemologically brings about the effect in question. But the de jure antecedent is a cause maker because it cannot bring about the effect in question, and the de facto antecedent is a cause maker because it simply does not bring about the effect. Hence, one might think mistakenly that a de facto antecedent cannot bring about the effect simply because it does not bring it about.

One might thus think that there is an ontological difference between one de facto antecedent and another de facto antecedent. The fact that the one antecedent brings about the consequent might seem to require that the other antecedent cannot bring it about. Why? The eliminated de jure antecedent does not have the potential to bring about the consequent, and so the eliminated de facto antecedent might not seem to have the potential to bring about the effect, either.

I would conclude, then, that the eliminated de facto antecedent is only an epistemological cause maker. It is not an ontological cause maker. The antecedent eliminated only makes known the de facto cause of an effect. It does not in actual fact make another antecedent the cause.

One might similarly mistake an eliminated de facto antecedent for a that without which. A resemblance and an ambiguity are again present. Neither an eliminated antecedent nor a that without which brings about a consequent. But an eliminated antecedent and a that without which have potentialities that are different. The antecedent is a potential cause of the consequent in question, but the that without which is not a potential cause of the consequent. The that without which does not have a form of an antecedent, but it does have a potentiality to have a form. Only after receiving a form does it become a potential cause. Before receiving a form it has a potentiality to be a potential cause, we might say.[41]

[41] Philosophers have traditionally distinguished between first and second potentiality as they have between first and second actuality. Incidentally, Mill also recognizes that a de facto cause has a that without which, though he does not use the term. He tells us only that philosophers

We can now see why the new theory must hold fixed the fact that Billy's rock does not strike the window. To hold fixed the fact that Billy's rock does not strike the window would be tantamount to assuming that Suzy's rock and Billy's rock are causes that differ in kind as well as in number. If we hold fixed the fact that it does not strike the window, we deprive Billy's rock of its de facto causal status vis-à-vis the broken window. That is, we assume that his rock does not have a potentiality of the kind needed to break the window. But it does have a potentiality of this kind.

6. Interventions, Contraventions, and Subventions

We might now ask, How can one de facto cause interact with another de facto cause? Obviously, a de facto cause can fail to bring about an effect because it is not of the kind to bring about the effect in question. But if it is specific to the effect, why does one de facto cause bring about the effect, and another de facto cause not bring it about? Or, to return to our example, why does Suzy's rock break the window, but Billy's rock does not?

Our distinction between de facto and de jure causes can help us answer this question as well. Causes de jure are infallible, one might say. Conceptual causes inhabit a tidy world pristine and serene. Their singular connections with their effects hold with an unexceptionable necessity. At least, in theory they do. We think laws truly causal to be necessary precisely because they do not admit of any known exceptions. Fire always burns, water always suffocates, gravity always attracts. And thrown rocks, if thrown accurately, always break windows.

But causes de facto are rather fallible. Perceptual causes are habitués of an untidy world crowded, perhaps overcrowded, with other causes. Their connections with their effects can be at best probable only. Why? The several causes jostle one another, and they can and do interfere with one another. Their connections consequently admit of many exceptions. In fact, fire does not always burn. Or, more precisely, this fire did not burn down this house. Why? Because the fire department put it out.[42]

What I shall call intervention, sometimes called preemption, presents causal interference in what may be its simplest variety. Causal intervention occurs when one de facto cause attains an effect in question before another de

---

have called this circumstance a material cause, but he adds the caveat that to call it a cause is tautology. I would take his caveat to mean that this circumstance is merely a condition of a de facto cause. But see Mill (1973, pp. 327-330).

[42] Compare Hume (1975, pp. 57-59 or 86-88).

facto cause. The two de facto causes are both potential causes of the same effect. But the one cause becomes an actual cause because it attains the effect before the other can. Suzy's rock and Billy's rock, for example, are both potential de facto causes of the broken window in question. But Suzy's rock broke the window, and Billy's rock did not. Why is her rock so privileged? Her rock intervened and deprived his rock of the effect. Her rock struck the window before his could.

Recall that a de jure cause becomes a de facto cause when it has a that without which. But a de facto cause remains a potential cause unless and until it attains its effect. Only then does it become an actual cause. Recall, too, that a cause and its effect can each have a different that without which. We might say that, until a rock strikes a window, the broken window is only a potential effect. But the broken window becomes an actual effect when it has its own that without which. Its that without which is the glass. Suzy's rock thus has an actual effect because its effect has a that without which. But Billy's rock has only a potential effect because its effect has no that without which. There is no longer a window for it to break.

But one might confuse causal interference of this kind with interference of another kind. We can easily mistake for causal intervention what I shall call causal contravention. Causal contravention occurs when one de facto cause defeats or destroys another de facto cause. Consider another recurrent example involving Suzy and Billy. This example is a matter no longer of juvenile delinquency but of a serious and felonious crime. Billy plants a bomb under the chair that Suzy will use on her way to a medical examination. Fortunately, Suzy discovers the bomb and flees before it can explode and cause her any harm. She subsequently passes her exam.[43]

Billy's bomb is what I am calling a contravening cause. With his intention and choice to plant a bomb, Billy threatens to disable the causes that maintain Suzy's good health, to put the matter mildly.[44] Suzy has formed an intention and made a choice to be healthy and to pass a medical examination. Her intention and choice cannot be even potential causes without a that without which. Obviously, their that without which is her body.[45] But with his bomb Billy will deprive her causes of their de facto potentiality by removing their that without which. He will in fact murder or maim her. His

---

[43] Compare Yablo (2004, pp. 119-120).

[44] In this example I assume intentionality in the first degree.

[45] And also other instruments, such as a nutritious diet and perhaps exercise equipment.

bomb would thus render her causes ineffective by destroying or damaging her body.

But this example is complex. Suzy devises contravening causes of her own. She formulates an intention to flee, and she chooses to do so. In haste, no doubt. Her intention and choice thus disable the bomb by removing the that without which of its effect. The bomb remains a potential cause because it will not be able to have any effect on her body. Of course, the bomb squad would contravene in another way. They would probably disable the bomb by defusing it. They would thus deprive the bomb of its causal potential by removing a component of its that without which.

We can now see how one might confuse an intervening cause with a contravening cause. There are present a similarity and a dissimilarity. Both a cause that intervenes and a cause that contravenes prevent another cause from attaining its effect. But an intervening cause does so by attaining the effect before the other cause, and a contravening cause does so by hindering the other cause from attaining the effect. Suzy's rock breaks the window before Billy's rock can break it, but Billy's bomb, if it had been successful, would have stopped Suzy from passing her medical exam.

I would now draw your attention to another fact of significance. Neither Billy's rock nor Billy's bomb is a de facto cause maker. Why not? Both causes are merely cause breakers, one might say. They are causes with a de facto potential, which was defeated, to interfere with another de facto cause. Billy's rock might have intervened and broken the window if he had thrown before Suzy did, and Billy's bomb might have contravened and harmed Suzy if she had not noticed it and fled.

In both examples Suzy's intention and choice would be, without any troublemaking from Billy, de facto causes. Her intention and choice in each example are embodied in a that without which. They are so embodied when she is intent on breaking the window and when she is intent on passing the medical exam. Suzy's rock and Suzy's body are each a that without which in its own right.[46]

[46] To explain what a cause maker is, Yablo compares causes that are more natural and less natural. He implicitly sets out a definition for a more natural cause when he defines what he calls an artificial cause. A cause is artificial, he argues, if in an actual scenario the cause neither meets nor cancels a causal need in an alternative scenario. A cause meets a need in one scenario if it meets the need that another cause would have met in another scenario, and a cause cancels a need in one scenario if it meets a need that no actual cause meets but would have met in another scenario. Yablo (2002, pp. 138-39); Yablo (2004, pp. 127-28).

There is also interference of an intermediate kind, which I shall term subvention. Interference of this kind occurs when one cause attains its effect with assistance from another cause. For example, suppose that Suzy throws her rock inaccurately, and it is going to miss the window. It is off course, in other words. But suppose further that Suzy's rock caroms off Billy's rock in mid-air and strikes the window. Suzy's rock is thus redirected by Billy's rock. Her rock strikes the window because his rock put her rock on course.

We can now say that Billy's rock is a cause maker in an ontological sense. Suzy's rock did not have the potential to break the window because it was thrown inaccurately. But Billy's rock changed its potential by changing its direction. Billy's rock thus causes, no doubt unintentionally, Suzy's rock to strike and to break the window pane. His rock makes her rock the actual cause of the broken window. Otherwise, her rock would have remained only a potential cause without any actual effect. Its effect would have had no that without which.

Subvention thus differs from intervention and contravention. An intervening and a contravening cause disable another cause. The one does so by removing the that without which of the effect, the other by removing the that without which of the cause. But a subvening cause enables another cause to attain its effect. A cause of this kind, as does any cause, imparts a form to its effect. But its effect has its that without which in another cause. In our example, Billy's rock gives Suzy's rock a new trajectory.[47]

With his definition of an artificial cause, he thus suggests that a more natural cause is the same in kind but different in number than a cause in an alternative scenario. How so? A natural cause, he implies, would be a cause that both meets a need and cancels a need in an alternative scenario. But a cause is the same in kind as another cause, I would argue, if it meets the same causal need that another cause would have meet in another scenario, and a cause is different in number if it meets a need that no actual cause meets but would have met in an another scenario.

Yablo thus in effect sets out an epistemological presupposition of a de facto induction. A de facto induction presupposes that an antecedent is the same in kind as another antecedent but different in number from another antecedent. The method of difference, for example, relies on the presupposition that Suzy's rock meets the same need of the broken window that Billy's rock would have met, and that Suzy's rock meets the same need that Billy's rock would have met but did not meet.

Of course, a de facto induction can rest on other presuppositions, perhaps that an antecedent is different both in kind and in number. But this and other presuppositions are not essential to the issue at hand.

[47] Yablo uses a similar example of two bowling balls and a bowling pin. The two balls collide as they go down the alley, and the one ball is knocked into the pin by the other. But he takes this

Subvention is clearly an ontological phenomenon. With Mill's methods we could discover epistemologically causal connections between one antecedent and another. I am confident that one could use the method of agreement or of difference to do so. We would surely ascertain that one thrown rock, if it strikes another rock in mid-air, has its course altered by the other rock. Events of this sort, though unlikely, do occur. Indeed, they are part of the fun of throwing rocks at windows. Or so I hear.

7. Conclusion

There is yet more to be said, I assure you. But I have probably said more than enough for the present occasion. I shall close simply by bequeathing to my reader the distinctions herein broached with the hope is that they might prove useful for addressing other problems concerning causation. These distinctions would include causality, causal dependency, and cause makers, all de facto and de jure; causes different in kind and in number; and causal intervention, contravention, and subvention.

Acknowledgements

I would like to thank an anonymous reviewer for some valuable comments on an earlier version of this paper.

References

Hume, David (1975). *An Enquiries concerning Human Understanding and concerning the Principles of Morals*. Nidditch, P. H., ed. Oxford: Clarendon Press.

Longworth, Francis (2005). Causation is Not Counterfactual Dependence. A shorter ms. and a longer ms. with diagrams provided by the author.

Mill, John Stuart (1973). *A System of Logic.* In Robson, J. M. (ed.), *Collected Works of John Stuart Mill*. Toronto: University of Toronto Press, vols. 7–8.

Plato (1914a). *Apology*. In Harold North Fowler (trans.), *Euthyphro, Apology, Crito, Phaedo, Phaedrus*. Cambridge: Harvard University Press, pp. 68–145.

example to illustrate not subvention but intervention, which he calls preemption. He argues not that the one ball knocks the pin over because its direction is changed by the other, but that the one knocks over the pin because the other fails to do so. See Yablo (2004, pp. 120-21).

Plato (1914b). *Phaedo*. In Harold North Fowler (trans.), *Euthyphro, Apology, Crito, Phaedo, Phaedrus*. Cambridge: Harvard University Press, pp. 200–403.

Yablo, Stephen (2002). De Facto Dependence. *Journal of Philosophy* 99, pp. 130–148.

Yablo, Stephen (2004). An Advertisement for a Sketch of an Outline of a Prototheory of Causation. In John Collins, Ned Hall, and L. A. Paul (eds.), *Causation and Counterfactuals*. Cambridge: MIT Press, pp. 119–137.

Wiggins, David (1986). Teleology and the Good in Plato's *Phaedo*. *Oxford Studies in Ancient Philosophy* 4, pp. 1–18.

Paul Schollmeier
Department of Philosophy
University of Nevada, Las Vegas
paul@UNLV.nevada.edu

Kant's Theory of the Sublime in Nature and His Concept of Nature

Young-sook Lee

Abstract

When we reflect on how man relates himself to Nature, we see that there arise two different positions. One is to set man against Nature, i.e., the dualistic concept of Nature; the other is to conceive man as a part of Nature, i.e., the non-dualistic concept of Nature. Of these two, Kant takes a dualistic position. In this essay, I shall discuss Kant's aesthetic theory, especially his theory of the sublimity of Nature, in conjunction with his dualistic concept of Nature. I'll show that Kant's sublimity theory has several problems and that those problems are closely connected with his dualistic conception of Nature. Then I'll show further that those problems can be successfully resolved in the non-dualistic concept of Nature. By doing so, I'll suggest that the non-dualists' understanding of Nature is more adequate.

1. Introduction

As a thinking being, man has a spontaneous desire to know the world he belongs to, i.e., Nature. Or, alternatively, man cannot escape having some kind of conception of Nature, because he must constantly relate himself to it. The experience of relating oneself to Nature must differ from individual to individual, from culture to culture, from age to age, and so forth. When we focus and reflect on how man relates himself to Nature, we see that there arise two different positions.[1] One is to set man against Nature or to draw a line of demarcation between man and Nature; the other is to count man as a part of Nature and assert a continuity between man and Nature. The latter holds that Nature has active and creative force on its own whereas the former denies it. I shall call the former 'the dualistic concept of Nature' and the latter 'the non- dualistic conception of Nature.'

[1] By 'man,' I mean human species distinguished from other classes such as animals, plants, rocks, and so on.

Filosofiska Notiser, Årgång 3, Nr. 1, April 2016, 25–50

Let me clarify the distinction a bit further. On what grounds do the dualists draw a line of demarcation between man and Nature? On what grounds do the non-dualists deny it? Above all, one simple and immediate answer to this question can be given in terms of value, I think. The dualists assert that there is a line of demarcation because they believe that man is superior to Nature in principle. The non-dualists deny it because they do not believe in such a value distinction in principle.[2]

One may advance one step further and ask, on what grounds do the dualists believe in a value distinction between man and Nature and on what grounds do the non-dualists reject it? A satisfying answer to this question cannot be given until we examine their metaphysics, which I will do in section 2. I will discuss Kant's metaphysics to represent the dualistic position, and the metaphysics of the Taoist and of Spinoza to represent the non-dualistic position. For the present, I shall try to give an answer simply to clarify the two terms, 'dualists' and 'non-dualists'.

The dualists assert a value distinction between man and Nature because they believe in man's distinctiveness: man alone, in contrast to all other natural beings, possesses a mind, a true source of activity and creativity. The non-dualists refuse to make a value distinction because they believe that man and Nature share something in common at the deepest level: namely, that which is neither simply mental nor simply physical but covers both; that which is somewhat like creative force or causal power; or that which they regard as the ultimate reality. In so far as both man and Nature share this same reality in common at the deepest level, it is in principle not right to set up a value distinction between them. In other words, the non-dualists do not believe that the mental makes man distinguishable from and superior to Nature as the dualists do, for the mental is to be subsumed under the deepest level of reality which man and Nature both share. The non-dualists do not regard Nature merely as passive and created as the dualists do, but also as

[2] It does not mean however that the non-dualists do not admit any kind of distinction among beings. They do admit certain kinds of distinction such as the distinction made in terms of structural complexity or degree of perfection. The distinction, however, does not extend so far as to draw a line of demarcation between man and Nature. For, though it may be true that a certain species, say human beings, is, generally speaking, structurally more complex and more perfect than other species, say animals, the same sort of distinction can be made within the same species as well. Namely, some men are, for instance, more perfect than others. This is why I say that the non-dualists do not believe in a value distinction between man and Nature in principle.

active and creative in itself.[3] In other words, by 'Nature' the non-dualists mean not only the entire physical universe or the sum total of phenomena (i.e., the passive Nature), but also the creative force or causal power which is responsible for both the mental and the physical (i.e., the active Nature). The non-dualistic concept of Nature is much broader than the dualistic concept of Nature in this sense.

Returning to our main theme, which concept of Nature is more adequate and more coherent? Which one has more explanatory power? To tell my answer first, I believe that it is the non-dualistic concept of Nature. In order to show why, I'll critically examine in section 3 Kant's aesthetic theory, especially his theory of the sublimity of Nature, because, in my view, this theory has several problematic implications or flaws and they are closely connected with his dualistic concept of Nature. In section 4, I will show that those problems will be resolved successfully, or alternatively, will not arise at all in the non-dualistic concept of Nature. By doing this I will suggest that the non-dualists' understanding of Nature is more adequate.

2. The Metaphysical Grounds of the Two Concepts of Nature

2.1. The Metaphysical Ground of the Dualistic Concept of Nature: Kant

In this section, I shall consider Kant's reflection on Nature and man and show how it belongs to the dualistic concept of Nature. Kant approaches Nature from a knowable or sensuous aspect to begin with: "By Nature, in the empirical sense, we understand the connection of appearances as regards their existence according to necessary rules. That is, according to laws" (CPR A216/B263). Undoubtedly, by the necessary rules or laws he means the rules of the understanding. For Nature under discussion, i.e., Nature in the empirical sense, is constituted by the concepts of the understanding. On this ground Kant says, "the understanding is itself the source of the laws of Nature" (CPR A127) or "understanding supplies a priori laws for Nature" (CJ 196). More specifically, what are the laws of Nature, then? One of them is definitely the law of causality. Since Nature is ordered by this law, Kant holds that Nature is a mechanism (CJ 360) and is governed by the mechanical law of causality.

One thing to note here is that this concept of Nature, i.e., Nature as a mechanism, is, as Kant makes clear, not an empirical concept, for it carries

[3] The non-dualists identify Nature with the ultimate reality in this sense.

with it the concept of necessity. It is rather a concept whose knowledge we possess a priori. (Gr 455) Kant asserts however that the concept of Nature as a mechanism is nonetheless "confirmed by experience and must inevitably be presupposed if experience is to be possible" (Gr 455).

However, this is not of course the whole story about Kant's concept of Nature. A further speculation about Nature begins when he encounters organic beings. In such cases, according to Kant, we can hardly be satisfied with viewing Nature as a mere mechanism. Kant illustrates his meaning by an example of a tree: its growth, reproduction, and adaptation.

> The way Nature comes, in these forms of life, to her own aid in the case of injury, where the want of one part necessary for the maintenance of the neighboring parts is made good by the rest; the abortions or malformations in growth, where, on account of some chance defect or obstacle, certain parts adopt a completely new formation, so as to preserve the existing growth, and thus produce an anomalous form. (CJ 372)

When we consider these phenomena, we naturally come to think, Kant believes, that the phases of such processes are directed to the end of achieving, continuing, maintaining the existence of a tree in its final form. On Kant's view, to think of the phenomena in this way is not only natural but actually necessary. In other words, Kant believes that in order to get an understanding of the essential Nature of organisms, we must approach them as if they were designed and as if every part is purposive: "That the origin of a simple blade of grass is only possible on the rule of ends is, to our human critical faculty, sufficiently proved by its internal form" (CJ 378).

Based on these beliefs, Kant holds that an organized being is not a mere machine, which has solely motive power. An organism possesses inherent formative power so that every part is thought as owing its presence to the agency of all the remaining parts and as existing for the sake of the others and of the whole. That is to say, an organism is one in which every part is reciprocally both end and means, with the principle of final causes as its governing principle (CJ 373-76).

Kant emphasizes however that the principle of final causes is not empirical but a priori because the principle possesses the universality and necessity that are marks of a priori principles. And, unlike the categories of the understanding, it is only a regulative a priori principle:

> It is true that the occasion for adopting this principle must be derived from experience -- from such experience, namely, as is methodically arranged and is called observation. But owing to the universality and necessity which that principle predicates of such finality, it cannot rest merely on empirical grounds, but must have some underlying a priori principle. This principle, however, may be one that is merely regulative, and it may be that the ends in question only reside in the idea of the person forming the estimate and not in any efficient cause whatever. (CJ 376)

Once we realize this, we can advance a step further and apply this principle to the whole of Nature: namely, Nature in general is to be estimated teleologically as a system of ends (CJ 377). In this manner, Kant introduces another concept of Nature: Nature as a system of ends.

Kant warns, however, that "this principle (of final causes) is altogether silent on the point of whether anything estimated according to it is, or is not, an end of Nature by design" (CJ 379). That is to say, we must treat Nature as if it had been designed, without prejudging whether it were in fact designed, as McFarland says.[4] When viewed as designed, "Nature's capacity for production by final causes must be considered as a special kind of causality"; whereas viewed as undesigned, "this capacity is at bottom identical with natural mechanism" (CJ 391). Whichever be the case, Kant emphasizes that the teleology must not lead us to convert Nature into an intelligent being, for that would be absurd: "when teleology is applied to physics, we speak with perfect justice of the wisdom, the economy, the forethought, the beneficence of Nature. But in so doing we do not convert Nature into an intelligent being, for that would be absurd" (CJ 383). Also he rejects that the teleology leads us to place an intelligent being above Nature: "but neither do we dare to think of placing another being, one that is intelligent, above Nature as its architect, for that would be extravagant" (CJ 383).

To sum up, Nature is, according to Kant, a mechanism on the one hand and a teleological system of ends on the other. As an object of sense or as a complex of phenomena, Nature is a mechanism because the principle of mechanical causality as one of the constitutive principles of the understanding applies to all phenomena. Nature is a teleological system of ends as well, because organisms afford objective reality to this concept. But

[4] J. D. McFarland (1970), p. 139.

the principle of final causes that is a governing principle here is not constitutive; but it can be used as a regulative principle to guide further scientific investigation, i.e., as a heuristic principle. What is common to both principles is that both are a priori principles: namely, they are not principles derived from experience.

One may ask however whether these two concepts of Nature, the mechanical and the teleological, are compatible. Kant answers that they are. For both concepts of Nature are the concepts of reflective judgment. Or, alternatively, both are regulative concepts, not constitutive concepts. In other words, to say that Nature is a mechanism is not to say "all production of material things is possible on mere mechanical laws" but to say "all production of material thing and their forms must be estimated as possible on mere mechanical laws" (CJ 387). In the same manner, to say that Nature is a teleological system of ends is not to say "some production of such things is not possible on mere mechanical laws" but to say "some products of material Nature cannot be estimated as possible on mere mechanical laws" (CJ 387). The first are the examples of constitutive principles whereas the second are those of regulative principles. Kant's point is that his two seemingly incompatible concepts of Nature are not really incompatible in so far as we understand them not as constitutive principles but as regulative principles. That is to say, if we understand them as constitutive principles, then an antinomy arises and one of the two would necessarily be false. But if we understand them as regulative principles, there is no contradiction between the two. Kant emphasizes therefore that when he says that "I must estimate the possibility of all events in material Nature, and consequently, also all forms considered as its products, on mere mechanical laws," he does not thereby assert that "they are solely possible in this way, to the exclusion of every other kind of causality" (CJ 387). On the contrary, continues Kant, "[t]his assertion is only intended to indicate that I ought at all times to reflect upon these things according to the principle of the simple mechanism of Nature, and, consequently, push my investigation with it as far as I can, because unless I make it the basis of research there can be no knowledge of Nature in the true sense of the term at all" (CJ 387).

One important thing that follows from this is that "[t]his leaves it an open question whether in the unknown basis of Nature itself the physico-mechanical and the final nexus present in the same things may not cohere in a single principle, it being only our reason that is not in a position to unite them in such a principle" (CJ 388). This is to admit the possibility that a supersensible ground be procured, although for us unknowable, as a substrate for the sensible Nature (CJ 409). Once we admit this possibility, then we can be more confident in estimating Nature on two kinds of principles, the mechanical and the teleological. That is to say, everything which is necessary in this Nature as an object of sense we should estimate according to mechanical laws. But concerning those which we must deem contingent in respect of mechanical laws or those which exist in Nature as an object of reason, namely, Nature in its entirety as a system, we should also consider in the light of teleological laws (CJ 409). "For we are at least assured of the possibility of both being reconciled, even objectively, in a single principle in as much as they deal with phenomena, and these presuppose a supersensible ground" (CJ 413). In other words, "Kant does not attempt to argue," McFarland points out, "that the mechanical principle may be true of appearances and the teleological true of the supersensible; rather he argues that both can be applied to appearances without contradiction, because it is possible that both are reconciled in the supersensible."[5] Kant holds therefore "The mechanical mode of explanation would not be excluded by the teleological as if the two principles contradicted one another" (CJ 409).

How does Kant understand man, then? Or, what is Kant's concept of man? In so far as man is a part of Nature, the two concepts that apply to Nature, i.e., the mechanical and the teleological, apply to man also: namely, man also is both a mechanism and an end.

Is it true, then, that man is nothing more than a part of Nature? No, it is not. Kant does not believe that man is merely a part of Nature. There is something more in man, which distinguishes man from all other beings. What is that? It is reason, according to Kant: "Now man actually finds in himself a power which distinguishes him from all other things -- and even from himself so far as he is affected by objects. This power is reason" (Gr 452). It naturally leads Kant to postulate the conception of the final end, i.e., "an end that does not require any other end as condition of its possibility" (CJ 434). In the teleological context, all beings in Nature are indeed regarded as ends; but they are, except for man, at the same time means for others. Man alone cannot be a means for others, but remains an end all the time. It amounts to the distinction between a mutually subordinated end and a final end. All natural forms of life except for man are, even when Nature is regarded as a teleological system, nothing more than subordinated ends: that

[5] *Ibid*., p. 130.

is, they are ends but at the same time means for others. But man must be presupposed to be the final end:

> we have in the world of beings but one kind whose causality is teleological, or directed to ends, and which at the same time are beings of such a character that the law according to which they have to determine ends for themselves is represented by them themselves as unconditioned and not dependent on anything in Nature, but as necessary in itself. The being of this kind is man, but man regarded as noumenon. He is the only natural creature whose peculiar objective characterization is nevertheless such as to enable us to recognize in him a supersensible faculty -- his freedom -- and to perceive both the law of the causality and the object of freedom which that faculty is able to set before itself as the highest end -- the supreme good in the world. (CJ 435)

Namely, if there is to be a final end at all, which reason must assign a priori, then it can only be man -- or any rational being in the world -- subject to moral laws, according to Kant. For "if the world only consisted of lifeless beings, or even consisted partly of living, but yet irrational beings, the existence of such a world would have no worth whatever, because there would exist in it no being with the least conception of what worth is" (CJ 448-49). This is how Kant believes that we have a rational ground to explain why Nature must be in accord with the conditions of man's happiness.

It becomes obvious now which concept of Nature Kant takes. It is definitely the dualistic one. That is to say, Kant believes that man must be distinguished from and superior to all other beings of Nature because man alone possesses reason[6] or because man alone can be the final end whereas other beings of Nature remain mutually subordinated ends. In brief, the distinction or demarcation line between man and Nature does not collapse even when Kant views Nature as a teleological system. Kant's concept of Nature, whether it be mechanical or teleological, stands therefore strictly under the dualistic concept of Nature.

[6] That man alone has reason does not mean, regretfully, that man remains rational all the time. We're frustrated more often than not to see that man's rationality becomes a slave of passion, to borrow Hume's words. Man can abuse his rationality and becomes irrational fairly easily. My point is that having a reason does not necessarily prove that man is superior to Nature, as Kant believed.

I've shown so far Kant's metaphysical reflection on Nature and man, which clearly evidences that he has a dualistic concept of Nature. I'll turn now to the metaphysical reflection of the non-dualists.

2.2. The Metaphysical Grounds of the Non-dualistic Concept of Nature: The Taoist and Spinoza

I'll consider here two metaphysical positions that support the non-dualistic concept of Nature, the metaphysics of the Taoist and of Spinoza.

2.2.1. The Taoist

For the Taoists, the ultimate reality is understood in terms of '*Tao*.' What is '*Tao,*' then? Lao Tzu says that *Tao* cannot be described in words: "The *Tao* that can be told of is not the eternal *Tao*. The name that can be named is not the enduring Name" (L 1). It is because, as Wang Pi says, "A name is used to determine a form. *Tao* is nebulously complete, form-less and cannot be known."[7] All the same, Lao Tzu gives it the name '*Tao*' (L 25). Why? '*Tao*' literally means 'Way.' According to Wang Pi, "the name '*Tao*' (or 'Way') is derived from the understanding that nothing does not follow it."[8] In other words, Lao Tzu seems to have given it the name '*Tao*' (or 'Way') because everything is supposed to follow it.

Let us try to characterize *Tao* now. Based on the text of Lao Tzu, I shall characterize *Tao* as follows: above all, *Tao* can be characterized as the origin, source, and mother of the universe.

> The name-less is the origin of Heaven and Earth;
> The named is the mother of the Ten Thousand Things.
> . . .
> These two issue from the same [source], and yet have different names (L 1)
>
> There is "something" nebulously complete in and by itself, which comes before Heaven and Earth.
> Silent, boundless, standing alone, and changeless;
> Its cyclical process has no end.
> It may be considered the mother of the world. (L 25)

[7] Charles Wei-hsun Fu and Sandra A. Wawrytko (1989), p. 16.
[8] *Ibid.*, p. 16.

Wang Pi comments, "All being (*yu*) originates from No-thingness (*wu*). Therefore at the time of no-form and no-name prior to the appearance of forms and names, *Tao* is the origin of the ten thousand things; at the time forms and names appear, it 'fosters them, rears them, nurtures them, and harbors them' (L 51), as their mother."[9]

How, then, does *Tao* develop? The way *Tao* develops itself is described in the following manner:

> *Tao* gives birth to the One;
> The One gives birth to the Two;
> The Two give birth to the Ten Thousand Things. (L 42)

As a consequence, *Tao* comes to pervade everywhere: namely, there isn't any place where *Tao* does not reside. The method *Tao* takes to develop itself is described in terms of *Yin* and *Yang*: "The Ten Thousand Things carry *Yin* and embrace *Yang*, infusing these two vital forces to realize harmony" (L 42). That is, when myriad creatures are begotten from *Tao* but without being given the form yet, the division of *Yin* (negative) and *Yang* (positive) already appeared; and when they begin to move, things come into being with form. *Yin* and *Yang* thus become the principle *Tao* employs to develop itself. We have to note here that *Yin* and *Yang* are not two separate energies or activities. The activity of the one is inherently contained within and created by the other, thus complementing each other. For both of them spring from the supreme ultimate, *Tao*. In brief, heaven and earth, or Nature, is understood as the physical representation of the interaction of *Yin* and *Yang*, themselves springing from *Tao*.

The *Yin* and *Yang* principle can also be understood as the principle of cyclic process. That is, "the movement of *Tao* is," says Lau, "described as turning back, meaning that *Tao* causes all things to undergo a process of cyclic change"[10]: "Reversion is the movement of *Tao*; Suppleness is the function of *Tao*" (L 40). Hence, Lau continues, "[w]hat is weak inevitably develops into something strong; but when this process of development reaches its limit, the opposite process of decline sets in, and what is strong once again becomes weak; and decline reaches its lowest limit only to give way once more to development. Thus there is an endless cycle of development and decline." That is to say, the *Yin* and *Yang* aspects of *Tao* or

---

[9] *Ibid*., p.1.
[10] D. C. Lau (trans.) (1963), p. 25.

the principle of *Tao* produces the endless process of cyclic change, and the natural order is delicately balanced. The process of life and death, for instance, is understood in terms of this principle. In short, the principle of *Tao* applies to all things that undergo change: it applies to man as well as to inanimate creatures.

In brief, according to the Taoist, all beings in Nature including man are considered to be threaded into one through *Tao*: all have their origins in *Tao*; all are governed by the *Yin* and *Yang* principle of *Tao*. That is to say, *Tao* exists as a core of all beings in Nature at the deepest level. Again, *Tao* is, as principle as well as origin of the universe, not something passive and created but something active and creative.[11] Accordingly, Nature must also be conceived of not merely as something passive and created but as something active and creative; or, alternatively, Nature is itself identified with *Tao*. The Taoist metaphysics thus surely reflects the non-dualistic concept of Nature.

2.2.2. Spinoza

In Spinoza’s metaphysics, the ultimate reality is understood in terms of one 'substance.' 'Substance' is identified with 'God' on the one hand, and 'Nature' on the other. What does he mean by 'substance,' 'God,' and 'Nature' respectively? And how and why are they identified with one another?

Spinoza defines 'substance' as "that which is in itself and is conceived through itself: that is, that the conception of which does not require the conception of another thing from which it has to be formed" (I D3). That is to say, Spinoza’s characterization of substance includes, "conceptual as well as ontological independence," as Allison puts it.[12] In contrast to it, "that which is in something else and is conceived through something else" is 'mode,' as Spinoza defines it: "By mode I mean the affections of substance" (I D5); hence, a mode is dependent upon substance conceptually as well as ontologically. Again, to help understand what 'substance' is, Spinoza introduces the concept 'attributes' defined as "that which the intellect perceives of substance as constituting its essence." (I D4)

It follows from this definition of 'substance' that there cannot be two or more substances of the same nature or attribute in the universe (I P5); that

[11] The *Tao* of the Taoists seems to me to be quite similar to the God of Spinoza, which I shall discuss in the next section, in that both may well be understood as a sort of creative power and principle of the universe.

[12] Henry E. Allison (1987), p. 46.

existence belongs to the nature of substance, for substance cannot be produced by anything else and is therefore self-caused (I P7); and that every substance is necessarily infinite or it possesses an infinity of attributes, for if it were finite, "it would have to be limited by another substance of the same nature, and that substance also would have to exist. And so there would exist two substances of the same attribute, which is absurd" (I P8).

What is Spinoza's 'God'? Spinoza defines 'God' as "an absolutely infinite being: that is, substance consisting of infinite attributes, each of which expresses eternal and infinite essence" (I D6). Hence, 'God' is identified with 'substance': "There can be, or be conceived, no other substance but God" (I P14).

What is Spinoza's 'Nature'? Spinoza approaches the understanding of Nature from the distinction between '*Natura naturans*' and '*Natura naturata*':

> By '*Natura naturans*' we must understand that which is in itself and is conceived through itself: that is, the attributes of substance that express eternal and infinite essence; or God insofar as he is considered a free cause. By '*Natura naturata*' I understand all that follows from the necessity of God's Nature, that is, from the necessity of each one of God's attributes; or all the modes of God's attributes insofar as they are considered as things which are in God and can neither be nor can be conceived without God. (I P29 S)

In brief, '*Natura naturans*' is 'God' and '*Natura naturata*' is the modes of 'God.'

In this manner, Spinoza identifies all these three, i.e., 'substance,' 'God,' and 'Nature.' In other words, Spinoza's metaphysical speculation concerning the ultimate reality leads to the conclusion that 'substance,' 'God,' and 'Nature' are all identical.

When the ultimate reality is understood in this manner, what kinds of characterizing features follow from it? First, God is the cause of all things: "From the necessity of the divine nature there must follow infinite things in infinite ways" (I P16). That is, God serves as the source or ground of all things. Hence, God is characterized as the first cause (I P16 C3) and the efficient cause (I P16 C1) of all things, according to Spinoza. God is also characterized as the immanent, not the extraneous or the transient cause of things (I P18), for it is the one and the only substance and all things are just modes of it, whether finite or infinite.

Now, if God is the efficient cause of all things and there is nothing that does not follow from God, what is the way God takes to fulfill this job? In other words, how does God act as the efficient cause of all things? What kind of causal relation is there between God and its modes or between *Natura naturans* and *Natura naturata*?

Certainly, God acts 'freely' because, being absolutely infinite, there are nothing beyond God, on which God could depend. Hence, Spinoza describes God as the free cause as well. (I P17 C2) What is acting 'freely' to Spinoza? 'Freedom' is explained by Spinoza in terms of self-causation and self-determination: "that thing is said to be free which exists solely from the necessity of its own Nature, and is determined to action by itself alone" (I D7). That is to say, when Spinoza says that God is the free cause, he does not mean that God acts in an undetermined manner. Rather, God acts in a certain determined manner. But the source of that determination is not outside but inside: it is self-determination. Thus Spinoza says, "God acts solely from the laws of his own Nature, and is constrained by none" (I P17).

What kind of laws are they? Or, what kind of necessity is it? It is generally agreed upon by commentators that Spinoza means by the 'laws' or the 'necessity' of God a kind of logical law or logical necessity. The expression, for instance, that things 'follow from' (I P16, 22) or are 'produced by' (I P33) God, or the geometrical analogy employed by Spinoza to explain the relation between God and things in "from God's supreme power or infinite nature an infinity of things in infinite ways -- that is, everything -- have necessarily flowed or are always following from that same necessity, just as from the nature of a triangle it follows from eternity to eternity that its three angles are equal to two right angles" (I P17 S) are suggested by Curley as the evidences that strongly support this interpretation.[13] In other words, what Spinoza would have in mind as the causal relation between God and things or between substance and its modes or between *Natura naturans* and *Natura naturata* is understood to be in some way analogous to the logical relation between ground and consequent.[14] Again, since logic is the rules of reason, the laws of God are taken to be equivalent with the laws and rules of reason.[15] It is tantamount to saying that the logical order of our ideas reflects the necessary causal order of reality.

[13] E. M. Curley (1969), p. 45.
[14] *Ibid.*, p. 46; and Allison (1987), p. 64.
[15] Wetleson (1979), p. 221.

Another characterizing feature of God is that it has both extension and thought as its attributes: "Thought is an attribute of God: i.e. God is a thinking thing" (II P1). "Extension is an attribute of God: i.e. God is an extended thing" (II P2). Of course, extension and thought are not the only attributes God possesses. God as an infinite being possesses an infinity of attributes. Extension and thought are however the only two attributes of God that are known to man. Moreover, what is to be noted here is that extension and thought are, according to Spinoza, not two distinct and separate entities but different attributes conceived by the human intellect as constituting God. For God is the one and the only substance that is indivisible: "Absolutely infinite substance is indivisible" (I P13).

Along this line, body and mind are not viewed by Spinoza as two distinct entities but as two aspects of one and the same entity. In other words, every body has, according to Spinoza, an idea corresponding to it (II P7). Since "there is necessarily in God an idea of each thing whatever, of which idea God is the cause in the same way as he is the cause of the idea of the human body," says Spinoza, "whatever we have asserted of the idea of the human body must necessarily be asserted of the idea of each thing" (II P13 S). For Spinoza, therefore, a sharp demarcation line does not exist between the living and the non-living, the conscious and the non-conscious, and consequently, between man and Nature, either. Instead, he distinguishes individuals in terms of bodily complexity or versatility: "in proportion as a body is more apt than other bodies to act or be acted upon simultaneously in many ways, so is its mind more apt than other minds to perceive many things simultaneously; and in proportion as the actions of one body depend on itself alone and the less that other bodies concur with it in its actions, the more apt is its mind to understand distinctly" (II P13 S). For example, the difference between the mind and body of human beings and those of animals is explained entirely in terms of a difference of degree in their structural complexity. Hence, Spinoza says, "[w]e cannot deny that ideas differ among themselves as do their objects, and that one is more excellent and contains more reality than another, just as the object of one idea is more excellent than that of another and contains more reality" (II P13 S).

How is Spinoza's metaphysics related to the non-dualistic concept of Nature? As I showed above, God or Nature (or *Natura Naturans*) is conceived to be the source or origin of all things (or *Natura Naturata*), including man. The way by which things follow from God is explained in terms of the necessity of divine nature that may be analogous with the laws of logic. Extension and thought are not considered as two separate substances but as two attributes of one and the same substance, God or Nature. Consequently, Spinoza admits no room for a demarcation line between man and Nature. Man is, like other beings, a mode of Nature; man as well as other beings follows the same laws of Nature; and mind does not distinguish man from other beings because mind, as an attribute of thought, pervades everywhere. In brief, Spinoza's metaphysics does not allow that man be considered as a being that is distinguishable from or superior to other beings of Nature. Also, Spinoza's metaphysics suggests that Nature be conceived of not only as passive and created (i.e., *Natura Naturata*) but also as active and creative (i.e., *Natura Naturans*). Spinoza's metaphysics thus reflects the non-dualistic concept of Nature.

3. Problems in Kant's Theory of the Sublimity of Nature

3.1. Aesthetic Pleasure

In the beginning of the third critique, Kant discusses the beautiful, where he gives four determinations of it. Among these four, the first one is concerned with aesthetic pleasure. Kant says that there are, roughly speaking, three kinds of delight: that of the agreeable, of the beautiful, and of the good. "Of these three kinds of delight, that of taste in the beautiful may be said to be the one and only disinterested and free delight; for, with it, no interest, whether of sense or reason, extorts approval." (CJ 210) In the following section of the sublime, Kant continues: "the beautiful and the sublime agree on the point of pleasing on their own account." (CJ 244) That is to say, the pleasure in the sublime has the peculiar characteristic of disinterestedness as well. The 'disinterestedness' thus becomes the characteristic feature of aesthetic pleasure of the sublime as well as of the beautiful, according to Kant.

My question is whether the 'disinterestedness' is coherent with his theory of the sublime, especially the sublime in Nature. To tell the conclusion first, it is not, in my view. Let us consider how the pleasure in the sublime in Nature arises. This pleasure has a different origin from the pleasure in the beautiful. Kant explains how the pleasure arises when contemplating the beautiful:

> all rational beings are capable of cognition, which requires the connectibility of two faculties, imagination and understanding. Particular acts of cognition involve the connection of particular

> representations with particular concepts--they require determinate relationships between imagination and understanding. But these acts presuppose an indeterminate general relationship--an underlying harmony of the two cognitive faculties. When they are idling or not seriously directed to the pursuit of knowledge, these faculties can play at knowledge, in a sense, enjoying the harmony between them without being tied down or bound by particular sense-intuitions or particular concepts. It is precisely in this state, i.e., the state in which the two cognitive faculties play freely enjoying the harmony between them that the mind takes intense pleasure or satisfaction, which is the experience of beauty. (CJ 217-218)

To wit, it is out of the harmony the faculty of judgments finds in relating the imagination, in its free play, to the understanding that the pleasure of beauty is generated.

How does the pleasure arise in contemplating the sublime in Nature, then? Is it the same kind of harmony that is responsible for the pleasure in the sublime? No, it isn't. Kant's answer is that the pleasure in the sublime arises because "we can become conscious that we are superior to Nature within, and therefore also to Nature without us." (CJ 264) Certainly it is an answer which shows his dualistic position on Nature. We feel, facing overwhelming Nature, at first, impotent as physical creatures; however, this sense of impotence brings home to us the awareness of our infinite superiority as moral beings, our spiritual inviolability in the midst of Natural perils. Thus, humanity in our person remains un-humiliated, though the individual might have to submit to this overwhelming power of Nature. Hence it is the sublimity of our nature that we actually admire.

> The feeling of the sublime is at once a feeling of displeasure, arising from the inadequacy of imagination in the aesthetic estimation of magnitude to attain to its estimation by reason, and a simultaneously awakened pleasure, arising from this very judgment of the inadequacy of the greatest faculty of sense being in accord with ideas of reason, so far as the effort to attain to these is for us a law. It is, in other words, for us a law (of reason), which goes to make us what we are, that we should esteem as small in comparison with ideas of reason everything which for us is great in Nature as an object of sense; and that which

> makes us alive to the feeling of this supersensible side of our being harmonizes with that law. (CJ 257)

It means that our faculty of judgment generates the feeling of the sublime, not out of the harmony, but out of the conflict and subsequent dominion made when relating the imagination to the Reason and its transcendent Ideas.

Is it not strange that we have to ascribe two different origins to the same aesthetic pleasure of disinterestedness? For Kant, it is not. The aesthetic pleasure of disinterestedness originates, in the case of the beautiful, from mental harmony, whereas it originates from mental conflict and subsequent dominion in the case of the sublime. For me, however, it is a strange and awkward position. Is the mental conflict really capable of causing disinterestedness? The mental harmony may well cause the disinterested delight; but I doubt that mental conflict does. The word 'conflict' is associated not so much with *disinterest* as with *interest* and pains of struggle. As a matter of fact, Kant himself claims that the sublimity in Nature represents the struggle, indeed, to break the limits of sensuous form in order to find a subjective equivalent of infinity within the self. I can hardly imagine, therefore, that the pleasure in contemplating the sublimity of Nature shall have a disinterested character. On the contrary, it will have a very 'interested' character, because the pleasure has certainly its origin in the struggle between the sense and reason and subsequent dominion of the latter over the former. In other words, I don’t think that such words as 'conflict,' 'struggle,' and 'dominion' which Kant employs to describe the sublimity experience are compatible with the claim that 'disinterestedness' is to be found in experiencing the sublime in Nature. One may object that Kant characterizes the experience of the sublime as disinterested because the person experiencing it is not herself threatened (for instance by a storm), but watches it safely; whereas a person physically threatened by a storm will not experience sublimity but will have an 'interested' relation to the storm. Is it not the case, though, that the act of distinguishing threat from safety is itself already a sign of an 'interested' relation to Nature? I would say therefore that this is one of the problems in Kant’s sublime theory, and that his dualistic concept of Nature stands behind this problem.

3.2. Aesthetic Freedom

'Freedom' in Kant has an equivocal meaning. The concept of freedom in his aesthetics and that in his ethics are different. In the case of the aesthetic judgment of the beautiful, Kant says that a free play occurs between the imagination and the concepts of the understanding; so 'freedom' in this context is an unhindered operation according to one’s own principle. This freedom is however not the same as the freedom developed in Kant’s ethics, moral freedom. Granted that it is self-determined, moral freedom is self-determined in a form of pure energy; or, alternatively, moral freedom comes from a power of opposition by limitless power of the will. That is to say, whereas the freedom in the aesthetic experience of the beautiful comes from inner harmony, the moral freedom comes from inner disharmony and opposition.

What about the case of the sublime? Since the sublime is also an aesthetic experience, can we expect the same kind of freedom, namely, the freedom of harmony? I am afraid not. As I’ve explained in the previous section, it is not a harmonious play (between the imagination and the concepts of the understanding) but a conflict (between imagination and the Ideas of reason) and a subsequent dominion of the other over the one that characterizes the aesthetic experience of the sublimity of Nature. Hence, the freedom emerging from the sublime is not the same as the freedom emerging from the beautiful. That is to say, aesthetic freedom must split into two kinds, according to Kant: one originates from harmony, and the other from conflict and subsequent dominion.

Is it really the case that we entertain entirely different kinds of freedom in our aesthetic experience of the sublime than in that of the beautiful? When I reflect on my own aesthetic experiences, it does not seem correct to say so. I don’t think I experience a feeling of conflict nor a feeling of dominion when I encounter the sublimity of Nature. It is more an uplifting feeling of transcendence: I feel as if I forget and leave behind my ordinary trifles and are invited to the hidden realm of the vast, deep and boundless. I feel as if the sublimity outside in Nature triggers the sublimity deep inside me and creates a kind of tuning experience. Anyway, it is certainly an experience of great freedom and liberation. I think on this account that the aesthetic freedom of the sublime is more a product of harmony than a product of conflict. To wit, I would think that aesthetic freedom is of one and the same kind regardless of whether it is of the sublime or of the beautiful: namely, it is a freedom emerging not from disharmony or conflict but from harmony and accordance. This is the second problem I want to point out in Kant’s sublime theory, which is certainly related to his dualistic concept of Nature.

3.3. The Claim of Displeasure-precedence

For Kant, Nature that is esteemed sublime is represented as a source of fear. In regard to this, Kant introduces the following assertion of displeasure-precedence: "[t]he feeling of the sublime is at once a feeling of displeasure, arising from the inadequacy of imagination in the aesthetic estimation of magnitude to attain to its estimation by reason, and a simultaneously awakened pleasure, arising from this very judgment of the inadequacy of the greatest faculty of sense being in accord with ideas of reason, ... " (CJ 257) That is to say, the conflict between imagination and reason produces a feeling of displeasure first because man is unable, as a phenomenal being, to grasp the magnitude of Nature; it turns into a feeling of pleasure the next moment, because she becomes conscious that man is superior to it as a noumenal being. So, Kant says, "the object is received as sublime with a pleasure that is only possible through the mediation of a displeasure." (CJ 260)

This claim does not seem to me to have any plausible ground. As far as my experiences are concerned, it is not so much fear as awe or limit-breaking openness and freedom that I experience in contemplating the sublimity of Nature. In addition, Kant ascribes the feeling of displeasure to the case of the sublimity of Nature alone. He does not ascribe displeasure to such cases as the sublimity in works of art or of the human form. I do not believe, however, such uniqueness does exist. It seems to me that the aesthetic feeling of the sublime is the same whether it is in art-works, in man, or in Nature. In all these cases, fear or displeasure does not precede. The sublimity of Nature may well provoke a feeling of humility, but not a feeling of humiliation as Kant claims; and the feeling of humility does not produce the feeling of displeasure. Why, then, does Kant make such a problematic assertion of displeasure-precedence to explain the sublime in Nature? It is surely because he has a dualistic concept of Nature, I would think.

3.4. The Morally Good's Immediate Interest in the Beauty of Nature

Kant maintains that taking an immediate interest in the beauty of Nature is always a mark of a morally good soul. Why is this so? His argument is as follows:

> We have a faculty of judgment which is merely aesthetic . . . . We have also a faculty of intellectual judgment for the mere forms of practical maxims . . . . The pleasure or displeasure in the former judgment is called that of taste, the latter is called that of the moral

> feeling. But now, reason is further interested in ideas (for which in our moral feeling it brings about an immediate interest) having also objective reality. That is to say, it is of interest to reason that Nature should at least show a trace or give a hint that it contains in itself some ground or other for assuming a uniform accordance of its product with our wholly disinterested delight (a delight which we cognize a priori as a law for everyone without being able to ground it upon proofs.) That being so, reason must take an interest in every manifestation on the part of Nature of some such accordance. Hence the mind cannot reflect on the beauty of Nature without at the same time finding its interest engaged. But this interest is akin to the moral. One, then, who takes such an interest in the beautiful in Nature can only do so in so far as he has previously set his interest deep in the foundations of the morally good. On these grounds we have reason for presuming the presence of at least the germ of a good moral disposition in the case of a man to whom the beauty of Nature is a matter of immediate interest ... and the analogy in which the pure judgment of taste that without relying upon any interest, gives us a feeling of delight, and at the same time represents it a priori as proper to mankind in general, stands to the moral judgment that does just the same from concepts, is one which, without any clear, subtle, and deliberate reflection, conduces to a like immediate interest being taken in the objects of the former judgment as in those of the latter -- with this one difference, that the interest in the first case is free, while in the latter it is one founded on objective laws. (CJ 300-301)

In other words, the moral feelings of a good soul and the aesthetic experience have similarity in that both of them are totally disinterested. This disinterestedness of the morally good is a reason why they have an immediate interest in the beauty of Nature. Interestingly, however, Kant does not include the sublimity of Nature here. As Kant himself says, it is not only the beautiful but also the sublime that evokes the 'disinterested pleasure' in the aesthetic experience. Then, why does he exclude the sublimity of Nature in this argument?

Moreover, Kant further argues, moral knowledge is presupposed by the feelings of the sublime. So, if we say of someone that he fails to appreciate the sublime, we assume that he also lacks moral sensitivity: "just as we taunt a man who is quite unappreciative when forming an estimate of an object of

Nature in which we see beauty, with want of taste, so we say of a man who remains unaffected in the presence of what we consider sublime, that he has no feeling (that is, the moral feeling)." (CJ 265) If such is the case, there has to be still less grounds to confine the immediate interest of the morally good to 'the beauty of Nature' alone and exclude 'the sublimity of Nature.' The better a soul is in moral respect, the more immediate interest he must have in the sublimity of Nature. In other words, I think it is far more coherent to say that it is the aesthetic experience of 'Nature' rather than 'beauty of Nature' that the morally good has an immediate interest in.

Will it be the case that Kant fails to see the incoherency in his claim? I do not know. I’m certain however that it is also a corollary of his dualistic concept of Nature. That is to say, Kant cannot but exclude the sublimity of Nature because sublimity does not reside in any of the things of Nature, but only in human mind, according to his theory of the sublime. He even claims that sublimity is an instance of 'the pathetic fallacy': the feeling of the sublime in Nature is respect for our own vocation, which we attribute to an object of Nature by a certain subreption (CJ 257). The morally good, then, cannot or must not have an immediate interest in the sublime in Nature. For such an interest would be eventually an interest in himself, a kind of self-absorption, which contradicts the morally good’s virtuous character. It is on this account, I think, that Kant has to exclude 'the sublimity of Nature' in the argument.

I’ve shown in this section that Kant’s dualistic concept of Nature has a direct connection with various problematic assertions and flaws in his theory of the sublime in Nature. What will happen to these problems if one takes the non-dualistic concept of Nature, then? I will show in the next section that these problems will be resolved successfully or do not arise at all in the non-dualistic concept of Nature.

4. Solution of the Problems

I will elaborate now how the problems in Kant’s sublimity theory can be resolved in the non-dualistic framework.

4.1. Aesthetic Pleasure

Let us start from the problem of aesthetic pleasure, first. My point was as follows. Kant claims that aesthetic pleasure in the sublime as well as in the beautiful has the characteristic of disinterestedness. But, if Kant’s theory of sublimity is correct, we can hardly expect ‘disinterestedness’ in the case of the sublime in Nature. For its aesthetic pleasure does not originate from the same source as that of the beautiful: in the case of the beautiful, the pleasure originates from harmony of the two mental faculties (imagination and understanding); but in the case of the sublime, the pleasure originates from dominion of reason over imagination after conflicts. While it stands to reason to claim that the harmonious state of mind has the characteristic of disinterestedness, it does not stand to reason, in my view, to claim that the conflicting state of mind has the characteristic of disinterestedness. Every conflict causes a struggle. In other words, I would think that Kant contradicts himself when he claims that the aesthetic pleasure issuing from the sublimity of Nature has the characteristic of disinterestedness.

According to the non-dualistic concept of Nature, however, such a contradiction does not arise. Nature is basically neither inferior nor superior to man. For the Taoist, *Tao* runs, as the ultimate reality, through both man and Nature. For Spinoza, both man and Nature (as *Natura Naturata*) are the modes of God or Nature (as *Natura Naturans*). In other words, both man and Nature are manifestations of the one and the same reality, *Tao* for the Taoist and God for Spinoza. Kant's theory of sublimity that presupposes superiority of man to Nature does not fit in here. In other words, the Kantian conflict between man and Nature does not have its proper place in this framework. On the contrary, it may better be described as a kind of attraction than conflict that is expected between man, especially the morally good man as Kant puts it, and Nature, because, as the old saying goes, like attracts like. Where attraction exists, harmony is to follow as a rule. And the pleasure one experiences in the sublimity of Nature is bound to be 'disinterested' because a personal interest does not exist in such a harmonious state. That is to say, whereas the claim that the aesthetic pleasure (both in the beautiful and in the sublime) has a characteristic of disinterestedness encounters a problem of incoherency in the dualistic concept of Nature, it does not in the non-dualistic concept of Nature.

4.2. Displeasure Precedence

Similarly, Kant's problematic assertion of displeasure-precedence disappears in the non-dualistic concept of Nature. Since there is no opposition or conflict between man and Nature, there isn't any ground for man to feel displeasure in the face of the sublimity of Nature. The feeling may be better put as awe or reverence than displeasure or fear as I mentioned earlier. For Nature is greater than man at least in that it does not impair its beauty and sublimity with something like an egotistical vanity or selfish desires as man frequently does. In short, the problematic assertion of displeasure-precedence disappears in the non-dualistic framework.

4.3. Aesthetic Freedom

Let us consider the problem of freedom now. To summarize, there are two different concepts of freedom in Kant: one is the freedom found in his aesthetics of the beautiful and the other is the freedom found in his ethics and his aesthetics of the sublime in Nature. The former originates from harmony; the latter from conflict.

My objection was that one did not seem to encounter such a radical difference of aesthetic freedom in between the case of the beautiful and that of the sublime. As far as my experience is concerned, I certainly do not see such a radical difference. I experience more or less a similar feeling of freedom. I explained previously how this seemingly awkward claim was also connected with his concept of Nature. Since Kant believed that man was certainly superior to Nature he could not ascribe the sublimity to Nature. Instead, the sublimity was thought to be an attribute of man, not of Nature. All the same, Kant could not still deny the fact that Nature did look greater than man at least in appearance. Faced with this dilemma, Kant had to distinguish between freedom of the sublime and freedom of the beautiful. But I do not think it is a correct or sound explanation of the phenomena.

If we view Nature from a different angle, i.e., the non-dualistic standpoint, this problem does not arise. Since man and Nature are essentially of the same root, or since man is neither inferior nor superior to Nature, man does not need to feel any tension facing Nature. That is to say, no room is made for conflict. The sublimity can be an attribute of Nature as well as of man. Consequently, the aesthetic freedom in contemplating the sublimity of Nature has its root in consonance and empathy rather than in conflict and subsequent dominion of man over Nature as in Kant. In other words, freedom in the sublime is essentially not different from freedom in the beautiful in this view, and the Kantian problem related to freedom does not arise, to begin with.

4.4. The Morally Good's Immediate Interest in Nature

Let us move now to the question of the morally good's immediate interest. I've explained previously that Kant's claim that the morally good had an immediate interest in the 'beauty of Nature' but not in the 'sublimity of

Nature' was an awkward position. It seems to me that the sublimity of Nature is, when viewed from an aesthetic point of view, as much, if not more, an object of the morally good's immediate interest as the beauty of Nature. Why, then, does Kant take such an awkward position of excluding the sublimity of Nature from the argument? It is because his sublime theory did not permit this, I would think.

According to Kant, it was the 'accordance' between the beautiful objects in Nature and the mental states of the morally good that made the latter to have an immediate interest in the former. That is to say, the beautiful as the origin of the disinterested pleasure is in 'accordance' with the disinterested mental state of the morally good. The accordance is not supposed to be found, however, in the case of the sublime because Nature cannot be an object of the sublime. In other words, since Kant, as dualist, thought that the sublimity did not reside in Nature but in man alone, he could not but exclude the sublime aspect of Nature when he explained the relationship between the morally good and Nature.

In the non-dualistic view of Nature, however, the sublimity exists not only in man but also in Nature. When it is said that the morally good have an immediate interest in Nature, 'Nature' includes its sublime aspect as well as its beautiful aspect. That is to say, the argument changes like this: the morally good have an immediate interest in Nature because the beauty and sublimity of their mental states find accordance and harmony in the beauty and sublimity of Nature.

5. Conclusion

There are two different ways man relates himself to Nature, dualistically or non-dualistically. The dualist like Kant believes that man is to be distinguished from Nature because man alone possesses reason and thus is superior to Nature. The non-dualists like the Taoist and Spinoza assert, however, that it is in principle wrong to draw a line of demarcation between man and Nature because both are manifestations of the one and the same reality.

I've attempted in this essay to seek for a more adequate and coherent concept of Nature. In order to do this, I've carefully examined and shown that Kant's sublimity theory of Nature has various problems, that they are closely connected with his dualistic concept of Nature, and that those problems can be resolved successfully or do not arise at all if one takes the non-dualistic concept of Nature. By doing so, I've proved indirectly that the non-dualists' understanding of Nature is more coherent and adequate. I believe that we can expect similar consequences in other areas of human experiences. Aesthetic experience is just one example I've shown in this essay.

Abbreviations

References to the primary texts are given directly in the main body of my essay, and references to the secondary literatures are given in the footnotes.

The primary texts and abbreviations used in Kant sections are:
Critique of Pure Reason, trans. by Norman Kemp Smith (1929), St. Martin's Press: New York.
Groundwork of the Metaphysic of Morals, trans. by H. J. Paton (1964), Harper & Row, Publishers: New York.
Critique of Judgment (Part I & II), trans. by James Creed Meredith (1952), Clarendon Press: Oxford.

CPR *Critique of Pure Reason*
  A A edition
  B B edition
Gr *Groundwork of the Metaphysic of Morals*
CJ *Critique of Judgment*

e.g., (CPR A261/B317) *Critique of Pure Reason*, A edition, p. 261 / B edition, p. 317.

The primary text in the Taoist section is the work of Lao Tzu, the title of which is well known as *Tao Te Ching*. The English translation I used for it is "Wang Pi's Commentary on Lao Tzu," trans. by Charles Wei-hsun Fu and Sandra A. Wawrytko (1989) in monograph.
e.g., (L 1) Lao Tzu, Chapter 1.

The primary text in the Spinoza section is *Ethics*, trans. by Samuel Shirley (1982), *The Ethics and Selected Letters*, Hackett Publishing Company, Inc. The abbreviations employed are as follows:

D Definition
P Proposition
C Corollary
S Scholium

e.g., (II P16 S) *Ethics*, Chapter II, Proposition 16, Scholium.

Acknowledgements
I would like to thank two anonymous reviewers for some valuable comments on an earlier version of this paper.

References

Allison, Henry E. (1987). Benedict *De Spinoza: An Introduction*. Yale Univ. Press: New Haven and London.

Curley, E. M. (1969). *Spinoza's Metaphysics: An Essay in Interpretation*. Harvard University Press: Cambridge, MA.

Fu, Charles Wei-hsun and Sandra A. Wawrytko. (trans.) (1989). Wang Pi's Commentary on Lao Tzu. In monograph.

Kant, Immanuel. (1929). *Critique of Pure Reason*. Trans. by Norman Kemp Smith, St. Martin's Press: New York.

Kant, Immanuel. (1952). *Critique of Judgment (Part I & II)*. Trans. by James Creed Meredith, Clarendon Press: Oxford.

Kant, Immanuel. (1964). *Groundwork of the Metaphysic of Morals*. Trans. by H. J. Paton, Harper & Row, Publishers: New York.

Lau, D. C. (trans.) (1963). *Lao Tzu: Tao Te Ching*. Penguin Books: Baltimore.

McFarland, J. D. (1970). *Kant's Concept of Teleology*. University of Edinburgh Press.

Spinoza, Baruch. (1982). *The Ethics and Selected Letters*. Trans. by Samuel Shirley, Hackett Publishing Company, Inc.

Wetleson, Jon. (1979). *The Sage and the Way: Spinoza's Ethics of Freedom*. VanGorcum, Assen: The Netherlands.

Young-sook Lee
yslee@eiu.edu
Philosophy Department
Eastern Illinois University

Satslogiken, Sanningsfunktioner och Semantiska Tablåer

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Den här uppsatsen handlar om satslogiken, sanningsfunktioner och semantiska tablåer. Syftet är dels att sammanfatta några intressanta fakta om satslogiken, dels att presentera viss ny information om denna välutvecklade gren av logiken. En sanningsfunktion är en funktion som tar oss från sanningsvärden till sanningsvärden (Det Sanna, Det Falska). Det finns 1-ställiga sanningsfunktioner som tar ett sanningsvärde som input och ger ett sanningsvärde som output; det finns 2-ställiga sanningsfunktioner som tar två sanningsvärden som input och ger ett sanningsvärde som output osv. Satslogiken är den gren av logiken som handlar om sanningsfunktioner. I den här uppsatsen undersöker jag alla 1- och 2-ställiga sanningsfunktioner. Jag utvecklar semantiska tablåsystem som innehåller konnektiv som uttrycker dessa sanningsfunktioner och introducerar en mängd tablåregler som kan användas i olika tablåbevis. Jag definierar att antal grundläggande begrepp, visar hur satslogiken kan simuleras i predikatlogik, går igenom en mängd användbara regler, och nämner flera intressanta teorem och metateorem.

1. Introduktion

Den här uppsatsen handlar om satslogiken, sanningsfunktioner och semantiska tablåer. Syftet är dels att sammanfatta några intressanta fakta om denna välutvecklade gren av logiken, dels att presentera viss ny information. Satslogiken är en av de äldsta typerna av logik och de logiska egenskaperna hos uttryck som ”inte”, ”och”, ”eller”, ”om, så” osv. har studerats sedan antiken (Łukasiewicz (1935)). Tanken att konstruktioner av detta slag uttrycker sanningsfunktioner är emellertid relativt ny och tycks ha sitt ursprung i Gottlob Freges verk (se uppsatserna i Frege (1995)).

Satslogiken kan studeras ur en mängd olika perspektiv och med hjälp av olika bevismetoder (Bostock (1997), Sundholm (2001)). Axiomatiska framställningar av satslogiken finner man bl.a. i Frege (1879), Whitehead &

Filosofiska Notiser, Årgång 3, Nr. 1, April 2016, 51–98

Russell (1910), Church (1956), Bostock (1997), Kap. 5, Epstein (2006), Kap. II, Kleene (1952), Mendelson (1964). Se också Quine (1950), Kap. 13.

Så kallade sanningstabeller kan t.ex. användas för att avgöra om en sats är logisk sann eller inte, om en sats är logiskt falsk eller inte, om en sats är logiskt kontingent eller inte, om två satser är logiskt ekvivalenta eller inte, om ett argument är giltigt eller inte, om en mängd satser är satisfierbar eller inte, m.m. Andra metoder, såsom den semantiska tablåmetoden, kan också användas för dessa ändamål (se Avsnitt 4.5). För mer information om sanningstabeller, se nästan vilken introduktion till logik som helst, t.ex. Bonevac (2003), Copi & Cohen (2002), Layman (2002), Lepore (2000), Mårtensson (1993), Prawitz (1991). Metoden utvecklades på 1920-talet av bl.a. Łukasiewicz och Post. Se också Wittgenstein (1921). Enligt Quine (1950), s. 38 var den grundläggande idén bakom sanningstabeller känd redan på 1880-talet av Frege, Peirce och Schröder.

Satslogiken kan även studeras med hjälp av s.k. sekvenssystem, se t.ex. Gentzen (1935a), (1935b), Bostock (1997), Kap. 7, och Buss (1998b).

En annan typ av bevisteori är s.k. naturlig deduktion. Introduktioner till satslogik och naturlig deduktion hittar man bl.a. i Anderson & Johnstone (1962), Bonevac (2003), Copi & Cohen (2002), Mårtensson (1993), Prawitz (1991), Thomason (1970).

En av de yngsta bevismetoderna använder s.k. semantiska tablåer. I den här uppsatsen koncentrerar jag mig på semantiska tablåsystem. För mer information om satslogik och semantiska tablåer, se t.ex. Bonevac (2003), Jeffrey (1967), Lepore (2000), Smullyan (1968). Se också referenserna i Avsnitt 4.2.

Oavsett vilken typ av bevisteori vi använder, kan satslogiken sägas vara den gren av logiken som handlar om sanningsfunktioner. En sanningsfunktion är en funktion som tar oss från sanningsvärden till sanningsvärden (Det Sanna, Det Falska). Det finns 1-ställiga sanningsfunktioner som tar ett sanningsvärde som input och ger ett sanningsvärde som output; det finns 2-ställiga sanningsfunktioner som tar två sanningsvärden som input och ger ett sanningsvärde som output osv. I den här uppsatsen undersöker jag alla 1- och 2-ställiga sanningsfunktioner. Jag utvecklar semantiska tablåsystem som innehåller konnektiv som uttrycker dessa sanningsfunktioner och introducerar en mängd tablåregler som kan användas i olika tablåbevis. Jag definierar ett antal grundläggande begrepp, visar hur satslogiken kan simuleras i predikatlogik, går igenom en mängd användbara regler, och nämner flera intressanta teorem och metateorem.

Uppsatsen är indelade i sex avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax och Avsnitt 3 om semantik. I Avsnitt 4, som sysslar med bevisteori, presenterar jag ett stort antal tablåregler och visar hur dessa kan användas för att skapa en mängd tablåsystem. Avsnitt 5 innehåller en lista på några välkända satslogiska sanningar, och i Avsnitt 6 går jag igenom en mängd intressanta metateorem.

2. Syntax

Det är möjligt att konstruera en stor mängd olika satslogiska språk, som bildar en enorm lattice. I den här sektionen skall jag säga lite mer om detta.

2.1. Alfabet

Satsbokstäver: p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
(Satslogiska) konstanter (0-ställiga konnektiv): T_0 (Verum), och $\underline{\mathsf{T}}_0$ (Falsum).
(Satslogiska) monadiska (1-ställiga) konnektiv (symboler eller operatorer): **S** (Det är sant att), **F** (Det är falskt att), $\neg$ (negation), T_1 (Verum), och $\underline{\mathsf{T}}_1$ (Falsum).
(Satslogiska) binära (dyadiska, 2-ställiga) konnektiv (symboler eller operatorer): $\wedge$ (konjunktion), $\vee$ (disjunktion), $\rightarrow$ ((materiell) implikation), $\leftrightarrow$ ((materiell) ekvivalens), $\underline{\wedge}$ (negerad konjunktion, NAND), $\underline{\vee}$ (negerad disjunktion, NOR), $\underline{\rightarrow}$ (negerad (materiell) implikation), $\underline{\leftrightarrow}$ (negerad (materiell) ekvivalens, exklusiv disjunktion, XOR), $\leftarrow$ (omvänd (materiell) implikation), $\underline{\leftarrow}$ (negerad omvänd (materiell) implikation), $<$ (höger redundans), $>$ (vänster redundans), $\leq$ (negerad höger redundans), $\geq$ (negerad vänster redundans), T_2 (Verum), och $\underline{\mathsf{T}}_2$ (Falsum).
Parenteser) och (.

0-an i T_0 och $\underline{\mathsf{T}}_0$ anger att T_0 och $\underline{\mathsf{T}}_0$ är konstanter, 1-an i T_1 och $\underline{\mathsf{T}}_1$ att T_1 och $\underline{\mathsf{T}}_1$ är monadiska konnektiv, och 2-an i T_2 och $\underline{\mathsf{T}}_2$ att T_2 och $\underline{\mathsf{T}}_2$ är binära konnektiv. Jag skall ofta utelämna denna siffra, då det inte ger upphov till någon mångtydighet. Satser som byggs upp med hjälp av Verum eller Falsum (som huvudkonnektiv) har alltid samma värdering (se Avsnitt 3.2.1).

2.2. Satser

Med hjälp av de symboler som introducerades ovan i Avsnitt 2.1 är det möjligt att konstruera en mängd olika satslogiska språk. Olika satslogiska språk kan innehålla olika primitiva tecken. Alla satslogiska språk innehåller alla satsbokstäver, höger och vänster parentes och någon delmängd (möjligtvis tom) av de övriga symbolerna i Avsnitt 2.1. Dessa symboler är primitiva. Låt $\copyright_1$ vara ett monadiskt konnektiv och låt $\copyright_2$ vara ett binärt konnektiv. Ett satslogiskt språk L{X} är ett satslogiskt språk som består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor med hjälp av symbolerna i {X}:

> Varje satsbokstav är en (atomär) sats i L{X}.
> Om $\top_0$ och $\bot_0$ ingår i {X}, så är $\top_0$ och $\bot_0$ (atomära) satser i L{X}.
> Om $\copyright_1$ är ett element i {X} och A är en sats i L{X}, så är $\copyright_1$A en sats i L{X}.
> Om $\copyright_2$ är ett element i {X} och A och B är satser i L{X}, så är (A $\copyright_2$ B) en sats i L{X}.
> Ingenting annat är en sats i L{X}.
> Satser som inte är atomära kallas ”komplexa” eller ”sammansatta”.

$\copyright_1$ är alltså ett slags satsoperatorer som syntaktiskt tar en sats som argument och ger en sats som värde, och $\copyright_2$ ett slags satsoperatorer som syntaktiskt tar två satser som argument och ger en sats som värde. De satslogiska konnektiven antas representera eller uttrycka olika sanningsfunktioner (se Avsnitt 3). Det finns 1-ställiga, 2-ställiga, 3-ställiga, 4-ställiga… osv. sanningsfunktioner. Vi skulle i princip kunna addera satslogiska konnektiv som motsvarar alla dessa funktioner till vårt satslogiska språk. Vi skall emellertid koncentrera oss på konstanter, monadiska och binära konnektiv i den här uppsatsen.

Det minsta språket L{} består endast av satsbokstäverna och parenteserna. Extensioner av detta språk innehåller alla satsbokstäverna, plus alla satser som kan genereras med hjälp en eller flera satslogiska konnektiv i enlighet med reglerna ovan. ”L{$\wedge$}”, står t.ex. för det språk som endast innehåller det satslogiska konnektivet $\wedge$, ”L{$\neg$, $\vee$}” för det språk som innehåller $\neg$ och $\vee$ osv. p, q och $(p \wedge q)$ är t.ex. satser i L{$\wedge$}, men det är inte $(p \vee q)$. p, q, $\neg(p \vee q)$ är satser i L{$\neg$, $\vee$}, medan $(p \wedge q)$ inte är en välformad formel i L{$\neg$, $\vee$}. Osv.

Allmänt gäller det att en mängd med n element har 2 ^ n (2 upphöjt till n) delmängder. Så, om vi antar att det finns ett konnektiv för varje sanningsfunktion, så finns det 2 ^ 2 = 4 språk som endast innehåller satsbokstäver eller konstanter, 2 ^ 6 = 64 språk som endast innehåller satsbokstäver, konstanter eller monadiska konnektiv, och 2 ^ 22 = 4194304 språk som endast innehåller satsbokstäver, konstanter, monadiska eller binära konnektiv. För det finns 4 monadiska sanningsfunktioner och 16 binära sanningsfunktioner (se Avsnitt 3). Ett satslogiskt språk är satslogiskt fullständigt om och endast om (omm) det kan uttrycka alla sanningsfunktioner (se Avsnitt 3.5). Inte alla satslogiska språk är fullständiga. Det är de fullständiga språken som är filosofiskt intressantast. Många olika språk är fullständiga. I fullständiga språk kan icke-primitiva termer som motsvarar alla sanningsfunktioner definieras i termer av de primitiva konnektiven.

Låt en n-mängd vara en mängd med n element och en r-delmängd av en mängd vara en delmängd av denna mängd med r element. Då denoteras antalet r-delmängder av en n-mängd med följande symbol (n över r):

$$\binom{n}{r}.$$

"n!" står för n-fakultet; n! erhålls genom att multiplicera alla naturliga tal från 1 till n, dvs. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$. Till exempel, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Vi stipulerar att $0! = 1$. Mer precist, vi kan använda följande rekursiva definition: $0! = 1! = 1$, $(n + 1)! = (n + 1) \times n!$ $(n \geq 1)$. Låt n och r vara positiva heltal som uppfyller villkoren $1 \leq r \leq n$. Då kan vi räkna ut n över r på följande sätt (Biggs (2002), s. 107):

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Med hjälp av denna formel kan vi ta reda på hur många olika språk med ett visst antal primitiva termer det finns. Det finns t.ex. 5 över 22 = 26334 språk som sammanlagt innehåller 5 primitiva satslogiska symboler (satslogiska konstanter, monadiska och/eller binära konnektiv).

2.3. Definitioner

I vissa språk som inte innehåller alla monadiska och binära symboler kan vi införa dessa med hjälp av definitioner. Om vårt satslogiska språk är fullständigt, kan vi i princip definiera nya satslogiska konnektiv som motsvarar varje sanningsfunktion. I språk som inte är satslogiskt fullständiga är detta inte alltid möjligt. De satslogiska språken "L{△}", "L{⊻}". "L{¬, ∧}", "L{¬, ∨}" är t.ex. satslogiskt fullständiga (de är inte de enda). Jag skall nu visa hur övriga monadiska och binära konnektiv kan definieras i dessa språk.

Negerad konjunktion (inte både och) som enda primitiv operator

T	$=_{df}$	(A△A)△A
$\underline{\mathrm{T}}$	$=_{df}$	(A△(A△A))△(A△(A△A))

$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	$(A\triangle A)\triangle(A\triangle A)$ (eller A)
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$(A\triangle A)$
$\neg A$	$=_{df}$	$(A\triangle A)$
$A\vee B$	$=_{df}$	$(A\triangle A)\triangle(B\triangle B)$
$A\wedge B$	$=_{df}$	$(A\triangle B)\triangle(A\triangle B)$
$A\rightarrow B$	$=_{df}$	$A\triangle(B\triangle B)$
$A\leftarrow B$	$=_{df}$	$B\triangle(A\triangle A)$
$A\leftrightarrow B$	$=_{df}$	$((A\triangle(B\triangle B))\triangle(B\triangle(A\triangle A)))\triangle((A\triangle(B\triangle B))\triangle(B\triangle(A\triangle A)))$
$A\veebar B$	$=_{df}$	$((A\triangle A)\triangle(B\triangle B))\triangle((A\triangle A)\triangle(B\triangle B))$
$A\underline{\rightarrow} B$	$=_{df}$	$(A\triangle(B\triangle B))\triangle(A\triangle(B\triangle B))$
$A\underline{\leftarrow} B$	$=_{df}$	$((A\triangle A)\triangle B)\triangle((A\triangle A)\triangle B)$
$A<B$	$=_{df}$	$(A\triangle(B\triangle(B\triangle B)))\triangle(A\triangle(B\triangle(B\triangle B)))$ (eller A)
$A>B$	$=_{df}$	$(B\triangle(A\triangle(A\triangle A)))\triangle(B\triangle(A\triangle(A\triangle A)))$ (eller B)
$A\leq B$	$=_{df}$	$A\triangle(B\triangle(B\triangle B))$ (eller $A\triangle A$)
$A\geq B$	$=_{df}$	$B\triangle(A\triangle(A\triangle A))$ (eller $B\triangle B$)
$A\underline{\leftrightarrow} B$	$=_{df}$	$(((A\triangle A)\triangle(B\triangle B))\triangle(A\triangle B))\triangle(((A\triangle A)\triangle(B\triangle B))\triangle(A\triangle B))$

Negerad disjunktion (varken eller) som enda primitiv operator

$\top$	$=_{df}$	$(A\veebar(A\veebar A))\veebar(A\veebar(A\veebar A))$
$\underline{\top}$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar A$
$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar(A\veebar A)$ (eller A)
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$(A\veebar A)$
$\neg A$	$=_{df}$	$(A\veebar A)$
$A\vee B$	$=_{df}$	$(A\veebar B)\veebar(A\veebar B)$
$A\wedge B$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar(B\veebar B)$
$A\rightarrow B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar B)\veebar((A\veebar A)\veebar B)$
$A\leftarrow B$	$=_{df}$	$((B\veebar B)\veebar A)\veebar((B\veebar B)\veebar A)$
$A\leftrightarrow B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar B)\veebar((B\veebar B)\veebar A)$
$A\triangle B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar(B\veebar B))\veebar((A\veebar A)\veebar(B\veebar B))$
$A\underline{\rightarrow} B$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar B$
$A\underline{\leftarrow} B$	$=_{df}$	$A\veebar(B\veebar B)$
$A<B$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar(B\veebar(B\veebar B))$ (eller A)
$A>B$	$=_{df}$	$(A\veebar(A\veebar A))\veebar(B\veebar B)$ (eller B)
$A\leq B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar(B\veebar(B\veebar B)))\veebar((A\veebar A)\veebar(B\veebar(B\veebar B)))$ (eller $A\veebar A$)
$A\geq B$	$=_{df}$	$((A\veebar(A\veebar A))\veebar(B\veebar B))\veebar((A\veebar(A\veebar A))\veebar(B\veebar B))$ (eller $B\veebar B$)
$A\underline{\leftrightarrow} B$	$=_{df}$	$(((A\veebar A)\veebar B)\veebar((B\veebar B)\veebar A))\veebar(((A\veebar A)\veebar B)\veebar((B\veebar B)\veebar A))$

Negation (inte) och konjunktion (och) som enda primitiva operatorer

T	$=_{df}$	$\neg(A\wedge\neg A)$
$\underline{\mathsf{T}}$	$=_{df}$	$A\wedge\neg A$
$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	A
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$\neg A$
$A\vee B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A\wedge\neg B)$
$A\rightarrow B$	$=_{df}$	$\neg(A\wedge\neg B)$
$A\leftarrow B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A\wedge B)$
$A\leftrightarrow B$	$=_{df}$	$\neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg(B\wedge\neg A)$
$A\underline{\vartriangle}B$	$=_{df}$	$\neg(A\wedge B)$
$A\underline{\rightarrow}B$	$=_{df}$	$A\wedge\neg B$
$A\underline{\leftarrow}B$	$=_{df}$	$\neg A\wedge B$
$A<B$	$=_{df}$	$A\wedge\neg(B\wedge\neg B)$ (eller A)
$A>B$	$=_{df}$	$\neg(A\wedge\neg A)\wedge B$ (eller B)
$A\leq B$	$=_{df}$	$\neg(A\wedge\neg(B\wedge\neg B))$ (eller $\neg A$)
$A\geq B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(A\wedge\neg A)\wedge B)$ (eller $\neg B$)
$A\underline{\leftrightarrow}B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A\wedge\neg B)\wedge\neg(A\wedge B)$
$A\underline{\vee}B$	$=_{df}$	$\neg A\wedge\neg B$

Negation (inte) och disjunktion (eller) som enda primitiva operatorer

T	$=_{df}$	$A\vee\neg A$
$\underline{\mathsf{T}}$	$=_{df}$	$\neg(A\vee\neg A)$
$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	A
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$\neg A$
$A\wedge B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A\vee\neg B)$
$A\rightarrow B$	$=_{df}$	$\neg A\vee B$
$A\leftarrow B$	$=_{df}$	$A\vee\neg B$
$A\leftrightarrow B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(\neg A\vee B)\vee\neg(\neg B\vee A))$
$A\underline{\vartriangle}B$	$=_{df}$	$\neg A\vee\neg B$
$A\underline{\rightarrow}B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A\vee B)$
$A\underline{\leftarrow}B$	$=_{df}$	$\neg(A\vee\neg B)$
$A<B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A\vee\neg(B\vee\neg B))$ (eller A)
$A>B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(A\vee\neg A)\vee\neg B)$ (eller B)
$A\leq B$	$=_{df}$	$\neg A\vee\neg(B\vee\neg B)$ (eller $\neg A$)
$A\geq B$	$=_{df}$	$\neg(A\vee\neg A)\vee\neg B$ (eller $\neg B$)
$A\underline{\leftrightarrow}B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(A\vee B)\vee\neg(\neg A\vee\neg B))$
$A\underline{\vee}B$	$=_{df}$	$\neg(A\vee B)$

Hur avgör vi om en definition är rimlig eller ej? Vi är fria att definiera våra logiska symboler på vilket sätt som helst. Men eftersom vi vill att de olika symbolerna skall representera vissa sanningsfunktioner är inte alla definitioner rimliga. Vi vill t.ex. att $\vee$ skall representera $f_{\vee}$. Givet denna tolkning, hur avgör vi t.ex. om definitionen av $\vee$ i termer av $\triangle$ är rimlig, dvs. hur avgör vi om följande definition är rimlig: $A \vee B =_{df} (A \triangle A) \triangle (B \triangle B)$? Det kan vi göra genom att visa att $A \vee B$ är logiskt ekvivalent med $(A \triangle A) \triangle (B \triangle B)$ då $\vee$ representerar $f_{\vee}$ och $\triangle$ representerar $f_{\triangle}$. Detta kan i sin tur visas t.ex. med hjälp av sanningstabeller på sedvanligt sätt. (Övning: visa att alla definitioner ovan är rimliga.)

2.4. Substitution och ersättning

2.4.1. Substitutionsfunktioner

1. En substitutionsfunktion, s, är en funktion från mängden av satsbokstäver till mängden av välformade formler. Mängden av välformade formler varierar från språk till språk, men substitutionsfunktionerna kan i princip definieras på samma sätt för alla språk.
2. Vi kan utvidga en substitutionsfunktion till en funktion från mängden av alla satser till mängden av alla satser. Låt $©_1$ vara ett monadiskt konnektiv som ingår i vårt språk, låt $©_2$ vara ett dyadiskt konnektiv i vårt språk, och låt Γ vara en mängd satser. Resultatet av att tillämpa s på en godtycklig sats A kan då definieras rekursivt på följande sätt:
    - (i) Om p är en satsbokstav, så ges s(p) av 1.
    - (ii) $s(©_1 A) = ©_1 s(A)$.
    - (iii) $s(A ©_2 B) = (s(A) ©_2 s(B))$.
3. $s(\Gamma) = \{s(A): A \text{ är ett element i } \Gamma\}$.

Exempel. (i) Låt s(p) = q och s(A) = A för varje annan satsbokstav. Då gäller det att $s(\neg p \rightarrow \neg p) = (s(\neg p) \rightarrow s(\neg p))$ [från 2.(iii)] $= (\neg s(p) \rightarrow \neg s(p))$ [från 2.(ii)] $= (\neg q \rightarrow \neg q)$ [från definitionen av s]. (ii) $s(\neg p \rightarrow \neg(p \wedge r)) = (s(\neg p) \rightarrow s(\neg(p \wedge r)))$ [från 2.(iii)] $= (\neg s(p) \rightarrow \neg s(p \wedge r))$ [från 2.(ii)] $= (\neg s(p) \rightarrow \neg(s(p) \wedge s(r)))$ [från 2.(iii)] $= (\neg q \rightarrow \neg(q \wedge r))$ [från definitionen av s]. ■

Om s(b) = B, så skall vi också använda följande notation ”[B/b]” för ”s”, dvs. [B/b] är en substitutionsfunktion som för argumentet b ger värdet B.

Låt b vara en godtycklig satsbokstav och låt A och B vara godtyckliga välformade formler i vårt språk. Då är [B/b](A) (eller (A)[B/b]) den sats som är resultatet av att substituera (byta ut) varje förekomst av b i A med B, dvs. [B/b](A) (eller (A)[B/b]) är resultatet av att tillämpa [B/b] på A. Om b inte förekommer i A, så är [B/b](A) = A. (Om A t.ex. är en satsbokstav skild från b, så är [B/b](A)= A.) En sats A' kallas en *omedelbar substitutionsinstans* av A omm det finns en sats p i A och någon välformad formel B sådan att A' = [B/p](A).

Exempel. Låt b = p, B = $(p\wedge q)$ och A = $(p\rightarrow p)$. Då är [B/b](A) = $[(p\wedge q)/p](p\rightarrow p) = ((p\wedge q)\rightarrow(p\wedge q))$. Låt b = q, B = $((p\rightarrow r)\rightarrow r)$ och A = $(p\rightarrow(q\rightarrow r))$. Då är [B/b](A) = $[((p\rightarrow r)\rightarrow r)/q](p\rightarrow(q\rightarrow r)) = (p\rightarrow(((p\rightarrow r)\rightarrow r)\rightarrow r))$. Låt b = r, B = $(p\vee\neg p)$ och A = $(p\rightarrow p)$. Då är [B/b](A) = $[(p\vee\neg p)/r](p\rightarrow p) = (p\rightarrow p)$. ■

2.4.2. Simultan substitution

Om $s(b_1) = B_1, \ldots,$ och $s(b_n) = B_n$, skall vi också använda följande notation "$[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$" för "s", dvs. $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$ är en substitutionsfunktion som för argumentet b_1 ger värdet $B_1, \ldots,$ och för argumentet b_n ger värdet B_n.

Låt $b_1, \ldots, b_n$ vara godtyckliga distinkta (icke-identiska) satsbokstäver och låt A och $B_1, \ldots, B_n$ vara godtyckliga välformade formler. Då är $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$ (eller $(A)[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$) den sats som är resultatet av simultan substitution av $B_1, \ldots, B_n$ för $b_1, \ldots, b_n$ för alla förekomster av $b_1, \ldots, b_n$ i A, dvs. $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$ $((A)[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n])$ är resultatet av att tillämpa substitutionsfunktionen $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$ på A. Det är tillåtet att inte alla satsbokstäver $b_1, \ldots, b_n$ förekommer i A. Om ingen av $b_1, \ldots, b_n$ förekommer i A, så är $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$ = A. En sats A' kallas en *simultan substitutionsinstans* av A omm det finns några satser $b_1, \ldots, b_n$ i A och några välformade formler $B_1, \ldots, B_n$ sådana att A' = $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$.

Exempel. Låt $b_1 = p$, $b_2 = q$, $B_1 = r$, $B_2 = s$ och A = $((p\rightarrow q)\rightarrow(\neg p\vee q))$. Då är $[B_1/b_1, B_2/b_2](A) = [r/p, s/q]((p\rightarrow q)\rightarrow(\neg p\vee q)) = ((r\rightarrow s)\rightarrow(\neg r\vee s))$. Låt $b_1 = p$, $b_2 = q$, $B_1 = q$, $B_2 = (p\wedge s)$ och A = $((p\wedge q)\rightarrow(p\vee q))$. Då är $[B_1/b_1, B_2/b_2](A) = [q/p, p\wedge s/q]((p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)) = ((q\wedge(p\wedge s))\rightarrow(q\vee(p\wedge s)))$. Låt $b_1 = p_1$, $b_2 = q$, $b_3 = r$, $B_1 = r$, $B_2 = (s\vee\neg s)$, $B_3 = q_2$ och A = $(p\vee q\vee r)$. Då är $[B_1/b_1, B_2/b_2, B_3/b_3](A) = [r/p_1, (s\vee\neg s)/q, q_2/r](p\vee q\vee r) = (p\vee(s\vee\neg s)\vee q_2)$. ■

Notera att en och samma satsbokstav inte ersätts med olika satser när vi använder en substitutionsfunktion. Olika satsbokstäver kan emellertid ersättas med samma sats. $\neg(p\wedge\neg p)$ är t.ex. en substitutionsinstans av $\neg(p\wedge\neg q)$, men $\neg(p\wedge\neg q)$ är inte en substitutionsinstans av $\neg(p\wedge\neg p)$.

Vi skall säga att en substitutionsfunktion som är injektiv och vars räckvidd är mängden av alla satsbokstäver är en *återbokstavering*.

Notera också skillnaden mellan successiva substitutioner och simultana substitutioner. ■

Exempel. Låt A = $(p \to q) \to (\neg p \to q)$. Då är $[p \wedge q/p, p/q](A)$ inte identisk med $[p \wedge q/p]([p/q](A))$; $[p \wedge q/p, p/q](A)$ är inte identisk med $[p/q]([p \wedge q/p](A))$ och $[p \wedge q/p]([p/q](A))$ är inte identisk med $[p/q]([p \wedge q/p](A))$. $[p \wedge q/p, p/q]((p \to q) \to (\neg p \to q)) = ((p \wedge q) \to p) \to (\neg(p \wedge q) \to p)$, $[p \wedge q/p]([p/q]((p \to q) \to (\neg p \to q))) = [p \wedge q/p]((p \to p) \to (\neg p \to p)) = ((p \wedge q) \to (p \wedge q)) \to (\neg(p \wedge q) \to (p \wedge q))$ och $[p/q]([p \wedge q/p]((p \to q) \to (\neg p \to q))) = [p/q](((p \wedge q) \to q) \to (\neg(p \wedge q) \to q)) = ((p \wedge p) \to p) \to (\neg(p \wedge p) \to p)$. ■

2.4.3. Ersättning

Uttrycket ”[C//B](A)” (eller ”(A)[C//B]”) står för resultatet av att ersätta (byta ut) noll eller flera förekomster av B med C i A. ”[C//B](A)” kan beteckna olika satser i olika kontexter. Om det är klart att vi talar om ersättning och inte substitution, så kan ersättningsoperationen betecknas på samma sätt som substitutionsfunktionerna, dvs. ”[C/B](A)” (eller ”(A)[C/B]”).

Exempel. Låt A = $(p \wedge q) \to (p \to q)$, B = p och C = $\neg\neg p$. Då kan [C//B](A), dvs. $[\neg\neg p//p]((p \wedge q) \to (p \to q))$, stå för någon av följande satser: $(p \wedge q) \to (p \to q)$, $(\neg\neg p \wedge q) \to (p \to q)$, $(p \wedge q) \to (\neg\neg p \to q)$ eller $(\neg\neg p \wedge q) \to (\neg\neg p \to q)$. Låt A = $\neg(p \wedge \neg p)$, B = p och C = $p \wedge p$. Då kan [C//B](A), dvs. $[p \wedge p//p](\neg(p \wedge \neg p))$ stå för någon av följande satser: $\neg(p \wedge \neg p)$, $\neg((p \wedge p) \wedge \neg p)$, $\neg(p \wedge \neg(p \wedge p))$ eller $\neg((p \wedge p) \wedge \neg(p \wedge p))$. ■

2.4.4. Simultan ersättning

Följande notation $[C_1//B_1, \ldots, C_n//B_n](A)$ står för resultatet av att samtidigt (simultant) ersätta noll eller flera förekomster av B_1 med C_1 och … och ersätta noll eller flera förekomster av B_n med C_n i A.

Exempel. Låt A = $p \to (\neg q \vee r)$, $B_1 = p$, $B_2 = \neg q \vee r$, $C_1 = \neg\neg p$ och $C_2 = (q \to r)$. Då kan $[C_1//B_1, C_2//B_2](A)$, dvs. $[\neg\neg p//p, (q \to r)//(\neg q \vee r)](p \to (\neg q \vee r))$ stå för någon av följande satser: $p \to (\neg q \vee r)$, $\neg\neg p \to (\neg q \vee r)$, $p \to (q \to r)$, eller $\neg\neg p \to (q \to r)$. ■

För mer information om ersättning och simultan ersättning, se Avsnitt 4.1.

I Avsnitt 4.1 kommer jag att ta upp några ersättnings- och substitutionsregler, som använder begreppen ersättning och substitution. Ersättning påminner om substitution, men det finns också några viktiga skillnader mellan dessa begrepp då de används i våra regler.

Då vi *ersätter* (*byter ut*) A mot B krävs det att $A \leftrightarrow B$ är ett teorem, då vi *substituerar* A för p är det inte nödvändigt att $A \leftrightarrow p$ är ett teorem.

Då vi ersätter A med B i en sats S behöver vi inte byta ut varje förekomst av A i S, men då vi substituerar A för p i S, måste vi byta ut varje förekomst av p i S mot A.

När vi *substituerar* A för p, måste p vara atomär, men det är inte nödvändigt att A är atomär, om vi *ersätter* A med B. B kan emellertid vara komplex så väl som atomär i båda fallen. (Se vidare Avsnitt 4.1.)

3. Semantik

Låt C vara mängden av alla konnektiv som ingår i vårt språk, V en mängd sanningsvärden, D en mängd designerade sanningsvärden (D är en delmängd av V), och $\{f_{\copyright}: \copyright \in C\}$ en mängd sanningsfunktioner, en för varje konnektiv © i C. Om © är ett n-ställigt konnektiv, så är $f_{\copyright}$ en n-ställig sanningsfunktion. Då kan klassisk satslogik sägas vara definierad av följande struktur: $<V, D, \{f_{\copyright}: \copyright \in C\}>$. V innehåller sanningsvärdena T (Det Sanna) och F (Det Falska). Ty enligt klassisk satslogik är varje sats antingen sann eller falsk och inte både sann och falsk, och varje sats kan betraktas som ett namn på ett av dessa värden. D utgörs av de sanningsvärden som bevaras i giltiga slutledningar. Enligt klassisk satslogik är det sanning som bevaras i giltiga slutledningar. Alltså är D = {T}. För varje konnektiv © i C gäller det att $f_{\copyright}$ är den sanningsfunktion ”©” refererar till, denoterar, står för, eller uttrycker. De monadiska konnektiven uttrycker 1-ställiga sanningsfunktioner, de binära konnektiven uttrycker 2-ställiga sanningsfunktioner osv. En 1-ställig sanningsfunktion är en funktion som tar ett sanningsvärde som argument och ger ett sanningsvärde som värde, en 2-ställig sanningsfunktion är en funktion som tar två sanningsvärden som input och ger ett sanningsvärde som output, osv. ”¬” står t.ex. för den 1-ställiga sanningsfunktionen $f_{\neg}$, som för argumentet T ger värdet F och argumentet F ger värdet T, dvs. $f_{\neg}(T) = F$, och $f_{\neg}(F) = T$. ”∧” denoterar den 2-ställiga sanningsfunktionen $f_{\wedge}$ som ger värdet T omm båda argumenten är T (om minst ett av argumenten är F ger den värdet F), dvs. $f_{\wedge}(T, T) = T$, $f_{\wedge}(T, F) = F$, $f_{\wedge}(F, T) = F$, och $f_{\wedge}(F, F) = F$. ”$\veebar$” refererar till den 2-ställiga sanningsfunktionen $f_{\veebar}$. $f_{\veebar}(T, T) = F$, $f_{\veebar}(T, F) = F$, $f_{\veebar}(F, T) = F$, $f_{\veebar}(F, F) = T$. Osv.[1]

[1] Tanken att de satslogiska konnektiven uttrycker sanningsfunktioner och att satser är ett slags namn på sanningsvärden utvecklades av en av den moderna logikens främsta pionjärer Frege, se t.ex. (1879), (1995). Teorin kan förefalla vara prima facie kontraintuitiv. Den tycks medföra att sanningen och falskheten är ett slags objekt och att alla sanna satser betyder samma sak. Men är inte sanningen en egenskap eller en relation? Och kan inte olika sanna satser ha olika betydelser? Det finns inte utrymme i den här uppsatsen att diskutera dessa frågor. Teorin har emellertid visat sig vara enormt fruktbar. För mer information om sanningsvärden och -funktioner, se t.ex.

En sanningsfunktion som tar n argument är definierad för 2^n (2 upphöjt till n) olika argument. För varje sådant argument antar funktionen ett av två möjliga värden (Det Sanna eller Det Falska), vilket innebär att det finns 2^(2^n) (2 upphöjt till 2 upphöjt till n) olika sanningsfunktioner med n argument. Således finns det t.ex. 4 olika sanningsfunktioner som tar 1 argument, 16 olika sanningsfunktioner som tar 2 argument, 256 sanningsfunktioner som tar 3 argument osv.

Varje sanningsfunktion kan beskrivas av en sanningstabell, där vi för varje möjlig sekvens av n sanningsvärden anger det sanningsvärde, som funktionen tilldelar sekvensen, eller – som man också kan uttrycka det – det sanningsvärde, som funktionen antar när argumentet utgörs av sekvensen ifråga. Tabell 1 sammanfattar alla 1-ställiga sanningsfunktioner, och Tabell 2 innehåller alla 2-ställiga sanningsfunktioner.

A	**S**	**F**	¬	T	$\underline{\mathsf{T}}$
S	S	F	F	S	F
F	F	S	S	S	F

Tabell 1

Tabell 1 skall läsas på följande sätt. Om A är sann, så är **S**A sann; och om A är falsk, så är **S**A falsk. Om A är sann, så är ¬A falsk; och om A är falsk, så är ¬A sann. TA är sann oberoende av om A är sann eller falsk; $\underline{\mathsf{T}}$A är falsk oberoende av om A är sann eller falsk. Osv.

A	B	$\wedge$	$\underline{\wedge}$	$\vee$	$\underline{\vee}$	$\rightarrow$	$\underline{\rightarrow}$	$\leftrightarrow$	$\underline{\leftrightarrow}$	$\leftarrow$	$\underline{\leftarrow}$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$	T	$\underline{\mathsf{T}}$
S	S	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F
F	S	F	S	S	F	S	F	F	S	F	S	F	S	S	F	S	F
S	F	F	S	S	F	F	S	F	S	S	F	S	F	F	S	S	F
F	F	F	S	F	S	S	F	S	F	S	F	F	S	F	S	S	F

Tabell 2

Tabell 2 skall läsas på följande sätt. Om A är sann och B är sann, så är A∧B sann. Om A är falsk och B är sann, så är A∧B falsk. Om A är sann och B är falsk, så är A∧B falsk. Och om A är falsk och B är falsk, så är A∧B falsk. Osv. Tabellen innehåller s.a.s. sanningstabellerna för alla binära konnektiv.

Gabriel (1984), Shramko & Wansing (red.). (2009), (2009b). Olika sanningsteorier presenteras bl.a. i Kirkham (1992) och Künne (2003).

En värdering eller tolkning, v, är en funktion från satsbokstäverna till sanningsvärdena i V. För varje satsbokstav, p, gäller det att v(p) antingen är T eller F och inte både T och F; dvs. varje atomär sats är antingen sann eller falsk, och inte både sann och falsk. Om v(A) = T, så skall vi säga att A är sann under värderingen (eller tolkningen) v eller att v gör A sann; om v(A) = F, så skall vi säga att A är falsk under värderingen (eller tolkningen) v eller att v gör A falsk. Antag att vårt språk innehåller konstanterna $\top$ och $\underline{\top}$. Då gäller det att $v(\top) = T$ och att $v(\underline{\top}) = F$, för varje värdering v, dvs. $\top$ är alltid sann under varje värdering och $\underline{\top}$ är alltid falsk under varje värdering. En sådan funktion kan utökas till en funktion från alla satser till V genom att tillämpa de olika sanningsfunktionerna rekursivt. Låt © vara ett monadiskt konnektiv och ® ett binärt konnektiv. Då gäller det att:

(i) $v(\copyright A) = f_{\copyright}(v(A))$.

(ii) $v(A \circledR B) = f_{\circledR}(v(A), v(B))$.

Exempel. $v(\neg(p \vee q)) = f_{\neg}(v(p \vee q)) = f_{\neg}(f_{\vee}(v(p), v(q)))$. Antag att v(p) = F och v(q) = F, dvs. att både p och q är falska. Då är $f_{\vee}(v(p), v(q)) = F$. Det följer att $f_{\neg}(f_{\vee}(v(p), v(q))) = S$, dvs. $f_{\neg}(f_{\vee}(F, F)) = S$. Med andra ord, $v(\neg(p \vee q)) = S$, dvs. $\neg(p \vee q)$ är sann under värderingen v. ■

Vi skall kalla $\langle V, D, \{f_{\copyright}: \copyright \in C\}\rangle$ för en värdestruktur eller en ram. En värdestruktur tillsammans med en värderings- eller tolkningsfunktion, $\langle V, D, \{f_{\copyright}: \copyright \in C\}, v\rangle$, är en modell. Givet denna begreppsapparat kan vi också säga att en sats A är sann i en modell $\langle V, D, \{f_{\copyright}: \copyright \in C\}, v\rangle$ omm A är sann under v; och att en sats A är falsk i en modell $\langle V, D, \{f_{\copyright}: \copyright \in C\}, v\rangle$ omm A är falsk under v.[2]

3.1. Några centrala semantiska begrepp

Jag skall nu definiera några grundläggande semantiska begrepp.

Logisk sanning. En sats A är (sats)logiskt sann omm den är sann under varje värdering. En sats som är satslogiskt sann brukar också kallas för en tautologi.

Logisk falskhet. En sats A är (sats)logiskt falsk omm den är falsk under varje värdering.

---

[2] Denna grundläggande typ av semantik kan enkelt utvidgas till s.k. flervärd logik, som antar att det finns fler sanningsvärden än Det Sanna och Det Falska, t.ex. Det Obestämda (varken sanna eller falska). Vi antar då helt enkelt att V innehåller dessa extra sanningsvärden och betraktar sanningsfunktionerna som funktioner som tar input från V och ger ett värde från V. D utgör fortfarande en delmängd av V och värderingsfunktionen tilldelar satsbokstäverna ett och endast ett sanningsvärde i V. För mer information om flervärd logik, se t.ex. Haack (1974), Priest (2008), Kap. 7–9, Hähnle (2001) och Urquhart (2001).

Satisfierbarhet (satser). En sats A är satisfierbar omm den är sann under minst en värdering.

Falsifierbarhet (satser). En sats A är falsifierbar omm den är falsk under minst en värdering.

Logisk kontingens. En sats A är (sats)logiskt kontingent omm den är satisfierbar och falsifierbar, dvs. omm den är sann under minst en värdering och falsk under minst en värdering.

Logisk implikation. En sats A implicerar (sats)logiskt (medför satslogiskt) en sats B omm B är sann under varje värdering som A är sann. Ekvivalent: omm $A \rightarrow B$ är (sats)logiskt sann.

Logisk ekvivalens. Två satser, A och B, är (sats)logiskt ekvivalenta omm de har samma sanningsvärde (som varandra) under varje värdering. Ekvivalent: omm $A \leftrightarrow B$ är satslogiskt sann. Ekvivalent: omm A medför B och B medför A. Ekvivalent: omm $A \rightarrow B$ och $B \rightarrow A$ är satslogiskt sanna.

Logisk följd. En mängd satser Γ medför en sats B omm det inte finns någon värdering som gör alla premisser i Γ sanna och slutsatsen B falsk. Om Γ medför B skall vi också säga att B följer (sats)logiskt ur Γ. Med andra ord: B följer ur Γ omm varje värdering som gör alla satser i Γ sanna också gör B sann.

Satisfierbarhet (mängder av satser). En mängd satser Γ är satisfierbar omm det finns minst en värdering som gör alla satser i Γ sanna.

Falsifierbarhet (mängder av satser). En mängd satser är falsifierbar omm det finns minst en värdering som gör alla satser i Γ falska.

3.2. Några sanningsfunktioner

Flera satslogiska konnektiv och sanningsfunktioner är mycket välkända; $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, och $\leftrightarrow$ presenteras t.ex. i nästan varje introduktion till satslogiken. Andra konnektiv och de sanningsfunktioner de representerar är mindre utforskade. I det här avsnittet skall jag säga lite om några av de senare.

3.2.1. $\top$ (Verum) och $\underline{\top}$ (Falsum)

Verum, $\top$, och Falsum, $\underline{\top}$, kan tolkas som konstanter ($\top_0$, $\underline{\top}_0$), monadiska ”sanningsfunktioner” ($\top_1$, $\underline{\top}_1$) eller dyadiska ”sanningsfunktioner” ($\top_2$, $\underline{\top}_2$). Som konstanter är de i sig välformade; $\top$, och $\underline{\top}$ är välformade. Då Verum och Falsum tolkas som monadiska satsoperatorer gäller det att om A är en sats, så är $\top A$ och $\underline{\top} A$ satser. Då de betraktas som dyadiska satsoperatorer gäller det att om A och B är satser, så är $A \top B$ och $A \underline{\top} B$ satser. Som funktioner tar de oss alltid till Det Sanna, respektive Det Falska. $\top A$ är sann oavsett vilket sanningsvärde A har och $\underline{\top} A$ är falsk oavsett vilket sanningsvärde A har. $A \top B$ är sann oavsett vilka sanningsvärden A och B har;

och A $\underline{\mathsf{T}}$ B är falsk oavsett vilka sanningsvärden A och B har. Följande ekvivalenser är satslogiskt sanna:

$\mathsf{T} \leftrightarrow \mathsf{T}A \leftrightarrow \mathsf{T}(A \wedge B) \leftrightarrow (\mathsf{T}A \wedge \mathsf{T}B) \leftrightarrow (A\,\mathsf{T}\,B)$
$\underline{\mathsf{T}} \leftrightarrow \underline{\mathsf{T}}A \leftrightarrow \underline{\mathsf{T}}(A \wedge B) \leftrightarrow (\underline{\mathsf{T}}A \wedge \underline{\mathsf{T}}B) \leftrightarrow (A\,\underline{\mathsf{T}}\,B)$
$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \mathsf{T})$ A omm A är ekvivalent med Verum.
$\mathbf{S}A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \mathsf{T})$ Det är sant att A omm A är ekvivalent med Verum.
$\neg A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \underline{\mathsf{T}})$ Inte A omm A är ekvivalent med Falsum.
$\mathbf{F}A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \underline{\mathsf{T}})$ Det är falskt att A omm A är ekvivalent med Falsum.
Låt © vara ett binärt konnektiv. Då gäller det generellt att $((A \copyright B) \leftrightarrow \mathsf{T}) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow \mathsf{T}) \copyright (B \leftrightarrow \mathsf{T}))$ är satslogiskt sann.

3.2.2. S (Det är sant att) och F (Det är falskt att)

Jag har ovan introducerat två monadiska satsoperatorer **S** och **F**, som inte brukar ingå i olika satslogiska språk. Den monadiska satsoperatorn **S** tar oss från Det Sanna till Det Sanna och från Det Falska till Det Falska, medan **F** tar oss från Det Sanna till Det Falska och från Det Falska till Det Sanna. Jag vill nu argumentera för att det är fruktbart att införa dessa operatorer eftersom de ofta kan användas för att symbolisera uttrycken ”Det är sant att” respektive ”Det är falskt att”. Jag skall med andra ord argumentera för att uttrycken ”Det är sant att” och ”Det är falskt att” ofta i svenska används för att uttrycka ett slags sanningsfunktioner och att detsamma gäller många andra liknande uttryck i andra naturliga språk, såsom de engelska uttrycken ”It is true that” och ”It is false that”. Detta kan ses som ett komplement till andra klassiska sanningsteorier. Jag skall kalla denna teori (eller hypotes) för den funktionella sanningsteorin (för uttrycken ”Det är sant att” och ”Det är falskt att”). Notera först att alla satser i följande tabell (Tabell 3) är logiskt sanna:

$\mathbf{S}A \vee \mathbf{F}A$, $\neg(\mathbf{S}A \wedge \mathbf{F}A)$, $\mathbf{S}A \leftrightarrow A$, $\mathbf{S}A \leftrightarrow \neg\mathbf{F}A$, $\mathbf{F}A \leftrightarrow \neg\mathbf{S}A$, $\mathbf{F}A \leftrightarrow \neg A$ (enligt denna ekvivalens uttrycker ”Det är falskt att” samma sanningsfunktion som ”Det är inte fallet att”), $\mathbf{S}\neg A \leftrightarrow \neg\mathbf{S}A$, $\mathbf{S}(A \wedge B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \wedge \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \vee B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \vee \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \rightarrow \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \leftrightarrow \mathbf{S}B)$.
Faktum är att det generellt gäller att $\mathbf{S}(A \copyright B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \copyright \mathbf{S}B)$ för alla binära konnektiv.[3]

Tabell 3

[3] Dvs. även följande satser är logiskt sanna: $\mathbf{S}(A \underline{\triangle} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\triangle} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\vee} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\vee} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\rightarrow} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\rightarrow} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\leftarrow} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\leftarrow} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\leftrightarrow} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\leftrightarrow} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A < B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A < \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A > B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A > \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A\,\mathsf{T}\,A) \leftrightarrow (\mathbf{S}A\,\mathsf{T}\,\mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A\,\underline{\mathsf{T}}\,A) \leftrightarrow (\mathbf{S}A\,\underline{\mathsf{T}}\,\mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \leftarrow B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \leftarrow \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \leq B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \leq \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \geq B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \geq \mathbf{S}B)$.

Här följer tre argument för den funktionella sanningsteorin.

Argument 1. Teorin kan förklara en mängd plattityder om uttrycken ”Det är sant att” och ”Det är falskt att”. Alla satser nedan tycks t.ex. vara sanna.

Varje sats är antingen sann eller falsk, dvs. det är sant att A eller det är falskt att A (för varje A).

Ingen sats är både sann och falsk, dvs. det är inte fallet att det är sant att A och att det är falskt att A (för något A).

Det är sant att A omm A.

Det är sant att A omm det inte är falskt att A.

Det är falskt att A omm det inte är sant att A.

Det är falskt att A omm det inte är fallet att A.

Det är sant att inte-A omm det inte är sant att A.

Det är sant att A och B omm det är sant att A och det är sant att B.

Det är sant att A eller B omm det är sant att A eller det är sant att B.

Det är sant att om A så B omm om det är sant att A så är det sant att B.

Det är sant att A omm B omm det är sant att A omm det är sant att B.

Alla dessa satser följer ur den funktionella sanningsteorin, eftersom alla satser i Tabell 3 är satslogiskt sanna. Detta talar för den funktionella sanningsteorin.

Argument 2. Teorin kan förklara varför uttrycket ”Det är sant att” är redundant i en viss mening. ”Det är sant att A” är, om den funktionella sanningsteorin är sann, ekvivalent med ”A”. Varje sats av formen ”**S**A” är ekvivalent med en sats som inte innehåller ”**S**”, som vi har sett ovan. Men vi kan visa något starkare. Vi kan visa att varje sats som innehåller **S** (Det är sant att) är ekvivalent med en sats som inte innehåller detta konnektiv. (Detta är lätt att se i ljuset av de ekvivalenser som omnämns i Tabell 3 ovan.) Allt som kan sägas med sanningsbegreppet kan därför i en viss mening sägas utan det.[4]

Argument 3. Teorin kan förklara varför det s.k. regressproblemet inte är något problem. Detta hänger ihop med punkten omedelbar ovan. Många filosofer har uppmärksammat att varje sanning tycks ge upphov till en

[4] Konnektivet **F** (Det är falskt att) är redundant i vissa system men inte i alla. I ett språk som innehåller negationstecknet och disjunktionstecknet är det t.ex. redundant. Men i ett språk som innehåller enbart **F** och konjunktionstecknet är det t.ex. inte redundant. Det är inte redundant eftersom språket L{$\wedge$} inte är sanningsfunktionellt komplett. Stryker man **F** från L{**F**, $\wedge$} kan man inte uttrycka alla möjliga sanningsfunktioner.

oändlig mängd nya sanningar. Om A, så är det sant att A. Om det är sant att A, så är det sant att det är sant att A. Om det är sant att det är sant att A, så… För vissa sanningsteorier är en sådan oändligt serie med sanningar möjligtvis problematisk, t.ex. om vi antar att varje sanning korresponderar med ett unikt faktum. I så fall måste vi anta att det existerar en oändlig mängd fakta för varje sanning. Det kan diskuteras om detta verkligen är ett problem. Men oavsett hur det förhåller sig med den saken, tycks det inte vara ett problem för den funktionella sanningsteorin. Visserligen gäller det att $A \leftrightarrow \mathbf{S}A \leftrightarrow \mathbf{SS}A \leftrightarrow \mathbf{SSS}A$… osv. Men detta tycks vara fullständigt oproblematiskt.

3.2.3. Varken eller, Inte både och, och Exklusivt eller

Det tycks inte finnas några enskilda ord i svenskan som svarar mot konnektiven $\underline{\vee}$, $\vartriangle$, $\underline{\leftrightarrow}$, på samma sätt som t.ex. ”eller” svarar mot $\vee$ och ”och” mot $\wedge$. Visserligen finns det vissa som menar att ”eller” kan tolkas på två olika sätt: ”inklusivt” eller ”exklusivt”. Enligt den ”inklusiva” läsningen är ”A eller B” sann om både A och B är sanna; enligt den exklusiva interpretationen är ”A eller B” falsk när både A och B är sanna. Om det här är riktigt, kan $\underline{\leftrightarrow}$ användas för att uttrycka den exklusiva tolkningen. Inte alla håller dock med om att ”eller” är mångtydigt på detta sätt. ”$A \underline{\vee} B$” kan läsas ”varken A eller B”; och ”$A \vartriangle B$” ”inte både A och B”. Vad är förklaringen till att det tycks finnas svenska ord som uttrycker vissa binära sanningsfunktioner, men att inte alla sanningsfunktioner tycks kunna uttryckas med enskilda ord? En möjlig förklaring är att t.ex. ”varken eller”, ”inte både och” och ”exklusivt eller” är ”negationerna” av ”eller”, ”och” respektive ”om och endast om” och att de därför är mer komplicerade. Men det är tveksamt om denna förklaring är tillräcklig. Det omvända gäller ju också: ”eller”, ”och” och ”om och endast om” är ”negationerna” av ”varken eller”, ”inte både och”, respektive ”inte om och endast om”. Troligtvis är det dock mer naturligt för människor att handskas med vissa sanningsfunktioner. Man skulle kunna tänka sig att införa ett antal nya svenska ord som uttrycker de sanningsfunktioner som denoteras av $\underline{\vee}$, $\vartriangle$, och $\underline{\leftrightarrow}$, t.ex. ”neller” för varken eller, ”noch” för inte både och, och ”xeller” för exklusivt eller. Men det lär nog dröja innan Svenska Akademien tar in dessa nyord i sin ordlista.

3.3. Formella egenskaper hos de binära sanningsfunktionerna

I det här avsnittet kommer jag att undersöka vilka formella egenskaper de olika binära konnektiven eller sanningsfunktionerna har. Jag kommer att koncentrera mig på reflexivitet, irreflexivitet, symmetri (kommutativitet), asymmetri, transitivitet, intransitivitet, associativitet och idempotens. Jag skall börja med att definiera hur dessa begrepp används i den här uppsatsen. Låt © vara ett binärt konnektiv. Då gäller följande:

© är reflexivt omm $A \copyright A$ är logiskt sann.
© är irreflexivt omm $\neg(A \copyright A)$ är logiskt sann.
© är symmetriskt omm $(A \copyright B) \rightarrow (B \copyright A)$ är logiskt sann.
© är kommutativt omm $(A \copyright B) \leftrightarrow (B \copyright A)$ är logiskt sann.
© är asymmetriskt omm $(A \copyright B) \rightarrow \neg(B \copyright A)$ är logiskt sann.
© är transitivt omm $((A \copyright B) \wedge (B \copyright C)) \rightarrow (A \copyright C)$ är logiskt sann.
© är intransitivt omm $((A \copyright B) \wedge (B \copyright C)) \rightarrow \neg(A \copyright C)$ är logiskt sann.
© är associativt omm $(A \copyright (B \copyright C)) \leftrightarrow ((A \copyright B) \copyright C)$ är logiskt sann.
© är idempotent omm $(A \copyright A) \leftrightarrow A$ är logiskt sann.

Om ett konnektiv © är reflexivt, transitivt etc. i denna mening, så skall vi också säga att den sanningsfunktion $f_{\copyright}$ som detta konnektiv uttrycker är reflexivt, transitivt osv. (Övning: bevisa alla resultat i Avsnitt 3.3 och 3.4.)

Reflexivitet. Följande konnektiv är reflexiva: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, och $\top$. Inga andra konnektiv är reflexiva, dvs. inget av följande konnektiv är reflexivt: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$,$\vee$, $\underline{\vee}$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\wedge$, $\triangle$, $\underline{\top}$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Irreflexivitet. Följande konnektiv är irreflexiva: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\underline{\top}$. Inga andra konnektiv är irreflexiva, dvs. inget av följande konnektiv är irreflexivt: $\rightarrow$, $\leftarrow$,$\vee$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\triangle$, $\top$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Symmetri. Följande konnektiv är symmetriska (kommutativa): $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\top$, $\underline{\top}$, $\triangle$, $\underline{\vee}$. Inga andra konnektiv är symmetriska (kommutativa), dvs. inget av följande konnektiv är symmetriskt: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Asymmetri. Följande konnektiv är asymmetriska: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\top}$. Inga andra konnektiv är asymmetriska, dvs. inget av följande konnektiv är asymmetriskt: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\wedge$, $\triangle$, $\top$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Transitivitet. Följande konnektiv är transitiva: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\top$, $\underline{\top}$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Inga andra konnektiv är transitiva, dvs. inget av följande konnektiv är transitivt: $\vee$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\triangle$.

Intransitivitet. Följande konnektiv är intransitiva: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\underline{\top}$.
Inga andra konnektiv är intransitiva, dvs. inget av följande konnektiv är intransitivt: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\triangle$, $\top$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Associativitet. Följande konnektiv är associativa: $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $<$, $>$, $\top$, $\underline{\top}$.
Inga andra konnektiv är associativa, dvs. inget av följande konnektiv är associativt: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\vee}$, $\triangle$, $\geq$, $\leq$.

Idempotens. Följande konnektiv är idempotenta: $\wedge$, $\vee$, $<$, $>$. Inga andra konnektiv är idempotenta, dvs. inget av följande konnektiv är idempotent: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\triangle$, T, $\underline{\mathrm{T}}$, $\geq$, $\leq$.

3.4. Relationer mellan olika binära konnektiv

Vi har nu undersökt några formella egenskaper hos våra konnektiv. I det här och nästa två avsnitt skall vi se närmare på några relationer mellan de olika konnektiven eller sanningsfunktionerna. Det här avsnittet innehåller en lista på de konnektiv som ”distribuerar” över konjunktion och disjunktion.

Distribution. Ett binärt konnektiv, ©, är distributivt (distribuerar) över det binära konnektivet, ®, omm (A © (B ® C)) $\leftrightarrow$ ((A © B) ® (A © C)) är logiskt sann.

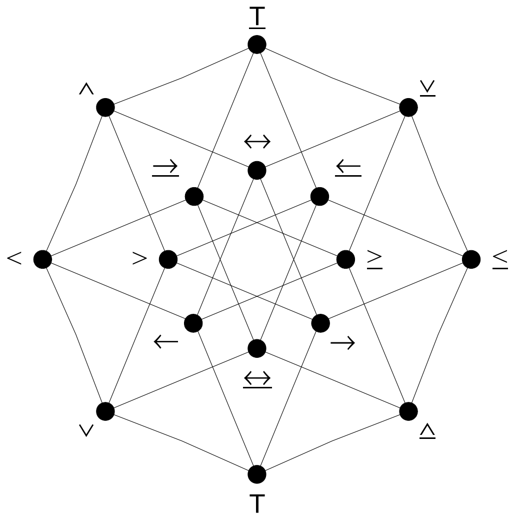
Distributiva över konjunktion. (A © (B $\wedge$ C)) $\leftrightarrow$ ((A © B) $\wedge$ (A © C)). Följande konnektiv är distributiva (distribuerar) över konjunktion: $\rightarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\vee$, $\wedge$, $<$, $\leq$, $>$, T, $\underline{\mathrm{T}}$. Följande konnektiv är inte distributiva (distribuerar inte) över konjunktion: $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\triangle$, $\geq$.

Distributiva över disjunktion. (A © (B $\vee$ C)) $\leftrightarrow$ ((A © B) $\vee$ (A © C)). Följande konnektiv är distributiva (distribuerar) över disjunktion: $\wedge$, $\vee$, $\leq$, $\rightarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $<$, $>$, T, $\underline{\mathrm{T}}$. Följande konnektiv är inte distributiva (distribuerar inte) över disjunktion: $\triangle$, $\underline{\vee}$, $\geq$, $\leftrightarrow$, $\leftarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftrightarrow}$.

3.4.1. Implikationer mellan binära konnektiv

Figur 1 nedan består av två oktagoner. Sammanlagt innehåller figuren 16 noder. Varje nod representerar ett binärt konnektiv (och en 2-ställig sanningsfunktion). Figuren visar den relativa styrkan hos de binära sanningsfunktionerna. © är minst lika starkt som (implicerar eller medför) ® omm (A © B) $\rightarrow$ (A ® B) är logiskt sann. Alla konnektiv är minst lika starka som sig själva. © är starkare än ® omm © implicerar ®, men ® inte implicerar ©. Inget konnektiv är starkare än sig självt. © och ® är lika starka omm © implicerar ® och ® implicerar ©. En operator högre upp i Figur 1 är starkare än en operator längre ned om den senare kan nås från den tidigare via en linje. $\underline{\mathrm{T}}$ är starkast, $\underline{\mathrm{T}}$ implicerar alla andra konnektiv; T är svagast, T impliceras av alla konnektiv. Det är trivialt sant att $\underline{\mathrm{T}}$ implicerar alla konnektiv, eftersom en implikation med falsk försats är sann oberoende av vilket sanningsvärde eftersatsen har. Det är trivialt sant att T impliceras av alla konnektiv, eftersom en implikation med sann eftersats är sann oberoende av vilket sanningsvärde försatsen har. Två konnektiv är ojämförbara omm det varken är fallet att det tidigare implicerar det senare eller att det senare implicerar det tidigare.

Exempel. Från Figur 1 kan vi t.ex. avläsa att ∧ implicerar: ∧, <, >, ∨, ↔, →, ←, T, och inga andra konnektiv. ↔ implicerar: ↔, →, ←, T och inga andra konnektiv. ∨ implicerar: ∨ och T, och inga andra konnektiv. ∧ och $\underline{\vee}$ är ojämförbara; och ∨ och △ är ojämförbara. ■



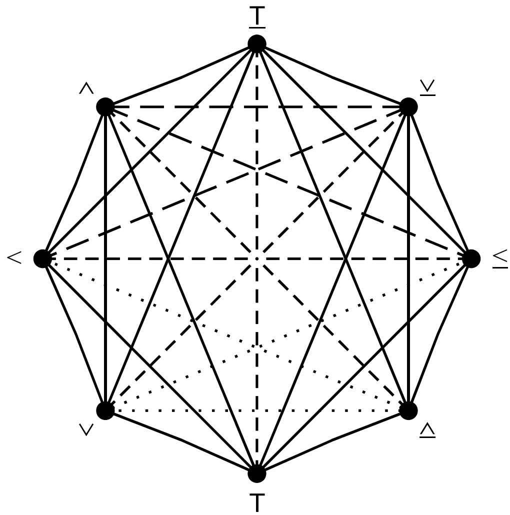
Figur 1

3.4.2. Kontradiktoriska, konträra och subkonträra konnektiv

Logisk implikation är inte den enda typen av relation mellan olika konnektiv. Konnektiv (och de sanningsfunktioner de representerar) kan också vara t.ex. kontradiktoriska, konträra eller subkonträra. Låt © och ® vara två binära konnektiv. Då definierar vi dessa begrepp på följande sätt:

© och ® är kontradiktoriska omm (A©B)↔¬(A®B) är logiskt sann.
© och ® är konträra omm ¬((A©B)∧(A®B)) är logiskt sann.
© och ® är subkonträra omm (A©B)∨(A®B) är logiskt sann.

Satser som befinner sig mitt emot varandra i den yttre eller inre oktagonen är kontradiktoriska (Figur 1, 2, och 3). © och $\underline{©}$ är kontradiktoriska. En understruken operator är kontradiktorisk med motsvarande operator som inte är understruken. Den understrukna operatorn är s.a.s ”negationen” av den icke understrukna operatorn (och tvärtom). $(A \underline{\copyright} B) \leftrightarrow \neg(A \copyright B)$ är logiskt sann, dvs. $(A \underline{\copyright} B)$ och $\neg(A \copyright B)$ är logiskt ekvivalenta (och tvärtom).



Figur 2

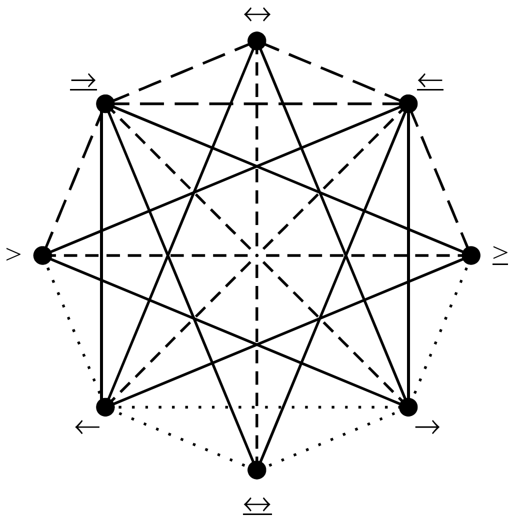
Figur 2 och 3 innehåller information om hur de olika konnektiven är relaterade till varandra, om de är kontradiktoriska, konträra eller subkonträra. Om två satser är förbunda med varandra med en streckad linje som består av långa streck, så är de konträra. Om två satser är förbundna med varandra med en streckad linje som består av halvlånga streck, så är de kontradiktoriska. Om två satser är förbundna med varandra med en prickad linje, så är de subkonträra.

Exempel. Figur 2: $\wedge$ och $\triangle$ är kontradiktoriska; $\wedge$ och $\underline{\vee}$ är konträra; $\vee$ och $\triangle$ är subkonträra. Figur 3: $\rightarrow$ och $\underline{\rightarrow}$ är kontradiktoriska; $\underline{\rightarrow}$ och $\underline{\leftarrow}$ är konträra; $\rightarrow$ och $\leftarrow$ är subkonträra.

Det finns också vissa förhållanden mellan konnektiven i den yttre och i den inre oktagonen i Figur 1, eller mellan konnektiven i Figur 2 och de i Figur 3. Följande konnektiv är konträra eller subkonträra.

Konträra konnektiv: $\wedge$ och $\underline{\leftarrow}$; $\wedge$ och $\underline{>}$; $\wedge$ och $\underline{\rightarrow}$; $\wedge$ och $\underline{\leftrightarrow}$; $\underline{\vee}$ och $\underline{\rightarrow}$; $\underline{\vee}$ och $>$; $\underline{\vee}$ och $\underline{\leftarrow}$; $\underline{\vee}$ och $\underline{\leftrightarrow}$; $<$ och $\underline{\leftarrow}$; $\underline{<}$ och $\underline{\rightarrow}$.

Subkonträra konnektiv: ↔ och ∨; ↔ och △; > och △; ≥ och ∨; ← och ∨; ← och △; → och ∨; → och △; < och →; ≤ och ←. ■



Figur 3

3.5. Fullständiga uppsättningar konnektiv

En uppsättning konnektiv (ett enskilt konnektiv) är satslogiskt fullständigt (eller komplett) omm det kan uttrycka alla sanningsfunktioner (av ställighet 1 eller högre). Här följer några exempel på fullständiga och icke fullständiga uppsättningar konnektiv.

Exempel. Exempel på fullständiga uppsättningar konnektiv: {△}, {⊻}, {¬, ∨}, {¬, ∧}, {¬, →}, {$\underline{\mathrm{T}}$, →}. Exempel på mängder av konnektiv som inte är fullständiga: {∧, →}, {∨, →}. ⊻ (varken eller), och △ (inte både och) är de enda (binära) konnektiv som själva är fullständiga. ■

Vi har i Avsnitt 2.3 ovan sett hur alla monadiska och binära konnektiv kan definieras i termer av △, ⊻, ¬ och ∨, eller ¬ och ∧. Detta resultat är emellertid inte tillräckligt för att bevisa att alla sanningsfunktioner kan definieras i termer av dessa konnektiv, eftersom det också finns 3-ställiga, 4-ställiga… osv. sanningsfunktioner. För ett bevis av olika ”fullständighetsresultat”, se t.ex. Pelletier och Norman (1990), Enderton (2001), ss. 45–52, Hunter (1971), ss. 62–71. Emil Post tycks ha varit först med att bevisa ”fullständighetsresultat” av detta slag, se Post (1921). Se också Bimbó (2010), Nicod (1917–20), Prior (1955), Kap. II, Schönfinkel (1924/1967), Sheffer (1913), Wernick (1942), Żyliński (1925). Peirce bör också nämnas i sammanhanget, se t.ex. Bimbó (2010).

3.6. Satslogik simulerad i predikatlogik

I det här avsnittet skall vi se hur man kan ”simulera” satslogiken i predikatlogik. För att göra det krävs någon form av predikatlogik med funktionsuttryck. I ett sådant system kan vi införa särskilda namn som refererar till Det Sanna respektive Det Falska, och definiera ett antal funktionsuttryck som svarar mot olika sanningsfunktioner. Med hjälp av vissa grundläggande antaganden och definitioner kan vi sedan t.ex. bevisa predikatlogiska satser som motsvarar alla satslogiska sanningar. Vi antar nedan att x och y varierar över satser. Bevisen lämnas till läsaren.

3.6.1. Vokabulär

v(x): x’s sanningsvärde. v är en funktion som tar oss från x till x’s sanningsvärde.
n(x): negationen av x, k(x,y) konjunktionen av x och y, d(x,y) disjunktionen av x och y, i(x,y) implikationen av x och y, e(x,y) ekvivalensen av x och y. ”n”, ”k”, ”d”, ”i”, ”e” är funktionsuttryck som representerar ett antal sanningsfunktioner, som tar oss från sanningsvärden till sanningsvärden.
”t” är ett namn på Det Sanna, och ”f” är ett namn på Det Falska.
Vx: x är ett sanningsvärde. V är ett 1-ställigt predikat.

3.6.2. Grundläggande antaganden

A1. $\forall x((v(x) = t) \vee (v(x) = f))$. Det gäller för varje x att x’s sanningsvärde är Det Sanna eller att x’s sanningsvärde är Det Falska.
A2. $\forall x \neg((v(x) = t) \wedge (v(x) = f))$. Det gäller för varje x att det inte är fallet att x’s sanningsvärde är Det Sanna och att x’s sanningsvärde är Det Falska.

3.6.3. Definitioner av sanningsfunktionerna

D1. $\forall x \forall y((v(n(x)) = t) \leftrightarrow (v(x) = f))$. Sanningsvärdet hos negationen av x är Det Sanna omm x’s sanningsvärde är Det Falska.
D2. $\forall x \forall y((v(k(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \wedge (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos konjunktionen av x och y är Det Sanna omm x’s sanningsvärde är Det Sanna och y’s sanningsvärde är Det Sanna.

D3. $\forall x \forall y((v(d(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \vee (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos disjunktionen av x och y är Det Sanna omm x's sanningsvärde är Det Sanna eller y's sanningsvärde är Det Sanna.
D4. $\forall x \forall y((v(i(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \rightarrow (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos implikationen av x och y är Det Sanna omm om x's sanningsvärde är Det Sanna så är y's sanningsvärde Det Sanna.
D5. $\forall x \forall y((v(e(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \leftrightarrow (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos ekvivalensen av x och y är Det Sanna omm x's sanningsvärde är Det Sanna omm y's sanningsvärde är Det Sanna.

Övriga sanningsfunktioner kan definieras på liknande sätt.

3.6.4. Definition av sanningsvärde

Det är möjligt att explicit ange att t och f är sanningsvärden. Men vi skall istället använda följande definition:
D6. $\forall z(Vz \leftrightarrow \exists y(z = v(y)))$.
z är ett sanningsvärde omm det finns ett y sådant att z är y's sanningsvärde.

3.6.5. Definition av sanningspredikat

Antag att sannings- och falskhetspredikaten definieras i termer av konstanterna t och f på följande sätt:
D7. $\forall x(Sx \leftrightarrow (v(x) = t))$. x är sann omm x's sanningsvärde är Det Sanna.
D8. $\forall x(Fx \leftrightarrow (v(x) = f))$. x är falsk omm x's sanningsvärde är Det Falska.

3.6.6. Teorem

Givet dessa antaganden och definitioner kan vi bevisa bl.a. följande satser:

T1. $\forall x(Sx \vee Fx)$. Varje sats är antingen sann eller falsk.
T2. $\forall x \neg(Sx \wedge Fx)$. Ingen sats är både sann och falsk.
T3. $\forall x \forall y(Sn(x) \leftrightarrow Fx)$. Negationen av x är sann omm x är falsk.
T4. $\forall x \forall y(Sk(x,y) \leftrightarrow (Sx \wedge Sy))$. Konjunktionen av x och y är sann omm x är sann och y är sann.
T5. $\forall x \forall y(Sd(x,y) \leftrightarrow (Sx \vee Sy))$. Disjunktionen av x och y är sann omm x är sann eller y är sann.
T6. $\forall x \forall y(Si(x,y) \leftrightarrow (Sx \rightarrow Sy))$. Implikationen av x och y är sann omm om x är sann så är y sann.
T7. $\forall x \forall y(Se(x,y) \leftrightarrow (Sx \leftrightarrow Sy))$. Ekvivalensen av x och y är sann omm x är sann omm y är sann.
T8. Vt: Det Sanna är ett sanningsvärde.

T9. Vf: Det Falska är ett sanningsvärde.
T10. $\neg t = f$. Det Sanna är inte identiskt med Det Falska.
T11. $\forall x((v(x) = f) \leftrightarrow \neg(v(x) = t))$ x’s sanningsvärde är Det Falska omm det inte är fallet att x’s sanningsvärde är Det Sanna.
T12. $\exists w \exists z(\neg(w = z) \wedge (Vw \wedge Vz))$. Det finns minst två sanningsvärden.
T13. $\forall u \forall w \forall z((Vu \wedge Vw \wedge Vz) \rightarrow (u = w \vee u = z \vee w = z))$. Det finns högst två sanningsvärden.
T14. $\exists u \exists w(Vu \wedge Vw \wedge \neg u{=}w \wedge \forall z(Vz \rightarrow (z = u \vee z = w)))$. Det finns exakt två sanningsvärden. Detta följer ur T12 och T13.
T15. $\forall x \forall y((v(x) = v(y)) \leftrightarrow (v(e(x,y)) = t))$. x’s sanningsvärde är identiskt med y’s sanningsvärde omm sanningsvärdet hos ekvivalensen av x och y är Det Sanna.
T16. $\forall x \forall y((v(x) = v(y)) \leftrightarrow Se(x,y))$. x’s sanningsvärde är identiskt med y’s sanningsvärde omm ekvivalensen av x och y är sann.

3.6.7. Alternativa antaganden

Låt D7’ och D8’ vara:
D7’. $\forall x((v(x) = t) \leftrightarrow Sx)$. x’s sanningsvärde är Det Sanna omm x är sann.
D8’. $\forall x((v(x) = f) \leftrightarrow Fx)$. x’s sanningsvärde är Det Falska omm x är falsk.

Då gäller det att om vi utgår ifrån T1–T7, D6 och D7’ och D8’, så kan vi bevisa A1–A2, D1–D5, och T8–T16.

Den utvidgning av predikatlogiken som beskrivs ovan kan bl.a. användas för att uttrycka satslogiska sanningar i predikatlogiken. DeMorgans lagar $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ och $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ kan t.ex. uttryckas på följande sätt:

DM1 $\forall x \forall y(Sk(x,y) \leftrightarrow Sn(d(n(x),n(y))))$.

DM2 $\forall x \forall y(Sd(x,y) \leftrightarrow Sn(k(n(x),n(y))))$.

DM1 säger: ”Det gäller för alla x och y att konjunktionen av x och y är sann omm negationen av disjunktionen av negationen av x och negationen av y är sann”.

DM2 läses ”Det gäller för alla x och y att disjunktionen av x och y är sann omm negationen av konjunktionen av negationen av x och negationen av y är sann”.

Vi kan bevisa att DM1 och DM2 följer predikatlogiskt ur våra antaganden ovan. Övriga satslogiska sanningar kan bevisas på liknande sätt.[5]

---

[5] Se Anderson och Zalta (2004) för mer information om några liknande idéer och definitioner. Anderson och Zalta utgår emellertid ifrån Zaltas s.k. Objekt Teori och deras tankar skiljer sig på flera väsentliga punkter från de idéer som presenteras i det här avsnittet.

4. Bevisteori

4.1. Några användbara regler

Jag skall i det här avsnittet nämna några användbara satslogiska regler. Dessa regler kan t.ex. bevisas i alla de axiomatiseringar av satslogiken som beskrivs i Appendixet. Substitutionsregeln används ofta som en grundläggande regel och övriga regler som härledda. $\vdash_S$ A innebär att A är ett teorem i S, där S är någon sund och fullständig variant av satslogiken.

Substitutionsregeln. Om $\vdash_S$ A, så $\vdash_S$ [B/b](A). Om A är ett teorem i S, så är varje omedelbar substitutionsinstans av A ett teorem i S.

Exempel. Antag att vi har bevisat att $p\rightarrow p$ är ett teorem i S. Då följer det t.ex. omedelbart ur substitutionsregeln att också $(p\wedge q)\rightarrow(p\wedge q)$ och $(r\vee q)\rightarrow(r\vee q)$ är teorem i S. För dessa satser är omedelbara substitutionsinstanser av $p\rightarrow p$. ■

Den simultana substitutionsregeln. Om $\vdash_S$ A, så $\vdash_S$ $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$(A). Om A är ett teorem i S, så är varje simultan substitutionsinstans av A ett teorem i S.

Exempel. Antag att vi har bevisat att $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$ är ett teorem i S. Då följer det omedelbart ur den simultana substitutionsregeln att t.ex. också $((r\wedge s)\wedge((r\wedge s)\rightarrow(r\rightarrow s)))\rightarrow(r\rightarrow s)$ är ett teorem i S. Faktum är att det följer att varje instans av schemat $(A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$ är ett teorem i S. För varje instans av detta schema följer ur $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$ med hjälp av den simultana substitutionsregeln. ■

Om det är klart vilket system vi talar om, kan vi utelämna ”S”.

Ersättningsregeln. (i) Om $\vdash$ $A\leftrightarrow B$, så $\vdash$ $C\leftrightarrow$[B//A](C) (om $A\leftrightarrow B$ är ett teorem, så är $C\leftrightarrow$[B//A](C) ett teorem), där [B//A](C) är likadan som C förutom att noll eller flera förekomster av A har ersatts med B (se Avsnitt 2.4 för mer information).

(ii) Om $\vdash$ $A\leftrightarrow B$ och $\vdash$ C, så $\vdash$ [B//A](C) (om $A\leftrightarrow B$ är ett teorem och C är ett teorem, så är [B//A](C) ett teorem), där C och [B//A](C) tolkas på samma sätt som i del (i).

(iii) Om $\vdash$ $A\leftrightarrow B$ och $\vdash$ [B//A](C), så $\vdash$ C (om $A\leftrightarrow B$ är ett teorem och [B//A](C) är ett teorem, så är C ett teorem), där C och [B//A](C) förstås på samma sätt som i del (i).

Exempel. Om vi har bevisat att $(p\wedge q)\rightarrow q$ och $p\leftrightarrow\neg\neg p$ är teorem, så kan vi omedelbart med hjälp av ersättningsregeln sluta oss till att $(\neg\neg p\wedge q)\rightarrow q$ är ett teorem. Om vi har bevisat att $(p\rightarrow(q\wedge q))\rightarrow\neg(p\wedge\neg(q\wedge q))$ och $q\leftrightarrow(q\wedge q)$ är teorem, så kan vi omedelbart med hjälp av ersättningsregeln sluta oss till att $(p\rightarrow q)\rightarrow\neg(p\wedge\neg q)$ är ett teorem. ■

Den simultana ersättningsregeln. (i) Om $\vdash A_1 \leftrightarrow B_1$ och … och $\vdash A_n \leftrightarrow B_n$ så $\vdash C \leftrightarrow [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ (om $A_1 \leftrightarrow B_1$ är ett teorem och … och $A_n \leftrightarrow B_n$ är ett teorem, så är $C \leftrightarrow [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ ett teorem), där $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ är resultatet av att ersätta noll eller flera förekomster av A_1 i C med B_1 och … och ersätta noll eller flera förekomster av A_n i C med B_n.

(ii) Om $\vdash A_1 \leftrightarrow B_1$ och … och $\vdash A_n \leftrightarrow B_n$ och $\vdash C$, så $\vdash [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ (om $A_1 \leftrightarrow B_1$ är ett teorem och … och $A_n \leftrightarrow B_n$ är ett teorem och C är ett teorem, så är $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ ett teorem), där C och $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n\,](C)$ tolkas på samma sätt som i del (i).

(iii) Om $\vdash A_1 \leftrightarrow B_1$ och … och $\vdash A_n \leftrightarrow B_n$ och $\vdash C \leftrightarrow [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n\,](C)$, så $\vdash C$ (om $A_1 \leftrightarrow B_1$ är ett teorem och … och $A_n \leftrightarrow B_n$ är teorem och $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ är ett teorem, så är C ett teorem), där C och $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ förstås på samma sätt som i del (i).

Exempel. Om vi har bevisat att $(\neg p \to (q \vee q)) \to (\neg\neg\neg p \vee (q \vee q))$, $\neg\neg p \leftrightarrow p$, och $(q \vee q) \leftrightarrow q$ är teorem, så kan vi med hjälp av den simultana ersättningsregeln t.ex. omedelbart sluta oss till att $(\neg p \to q) \to (p \vee q)$ är ett teorem. Om vi har bevisat att $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$, $(p \wedge \top) \leftrightarrow p$, och $(q \vee \bot) \leftrightarrow q$ är teorem, så kan vi t.ex. omedelbart med hjälp av ersättningsregeln sluta oss till att $((p \to q) \wedge \neg(q \vee \bot)) \to \neg(p \wedge \top)$ är ett teorem. ■

4.2. Semantiska tablåer och semantiska tablåsystem

I det här avsnittet skall jag gå igenom några s.k. tablåregler, som kan användas för att skapa en mängd semantiska tablåsystem. Semantiska tablåer kan bl.a. användas för att bevisa att en sats är satslogiskt sann, satslogiskt falsk eller satslogiskt kontingent, de kan användas för att avgöra om en mängd satser är konsistent eller inte, och de kan användas för att avgöra om ett argument är satslogiskt giltigt eller ej (se Avsnitt 4.5 nedan).

Evert Beth tycks ha varit först med att beskriva denna metod, se t.ex. Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463. Enligt Smullyan (1968), s. 15, kommer den ursprungliga idén från Gerhard Gentzen (Gentzen (1935), (1935b)). Detta tycks även vara Melvin Fittings åsikt (1999), s. 7. Andra tidiga bidrag utgörs av Hintikka (1955), Lis (1960), Smullyan (1963), (1965), (1966), (1968) och Jeffrey (1967). Den typ av semantiska tablåer som används i den här uppsatsen påminner kanske mest om den typ som beskrivs i Jeffrey (1967). För mer om denna metod, se t.ex. D'Agostino (1999), D'Agostino et al. (1999), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), och Smullyan (1968). Grundläggande uttryck som

”semantisk tablå”, ”öppen och sluten gren”, ”öppen och sluten tablå”, ”tablåsystem” osv. definieras på vanligt vis (se vidare Avsnitt 4.4). Den här uppsatsen innehåller emellertid en mängd nya tablåregler. I system som innehåller konstanterna T och $\underline{\mathrm{T}}$, måste vi lägga till antagandet att en gren är sluten om den innehåller ¬T eller $\underline{\mathrm{T}}$.

4.3. Semantiska tablåregler

4.3.1. Grundläggande regler

Vilka grundläggande regler ett semantiskt tablåsystem bör innehålla beror på vilket språk vi utgår ifrån. En mycket vanlig uppsättning regler är: (¬¬), (∧), (¬∧), (∨), (¬∨), (→), (¬→), (↔), och (¬↔). Jag skall emellertid introducera regler för alla monadiska och binära operatorer som vi har nämnt i den här uppsatsen.

I princip skulle man kunna klara sig med reglerna (¬¬), ($\underline{\triangle}$), och (¬$\underline{\triangle}$), eller (¬¬), ($\underline{\vee}$), (¬$\underline{\vee}$), om vi utgår ifrån ett språk som endast innehåller ¬ och $\underline{\triangle}$ eller $\underline{\vee}$. Andra konnektiv kan i sådana språk definieras i termer av de grundläggande symbolerna (se Avsnitt 2.3). För att bevisa en sats måste man då först översätta den till primitiv notation och sedan bevisa den översatta satsen. Detta leder till system som är ekonomiska vad gäller antalet primitiva symboler, men är något mer komplicerade att använda i praktiken än många andra system som innehåller fler odefinierade konnektiv och regler.

4.3.2. Satslogiska regler

4.3.2.1. Regler för monadiska konnektiv och CUT

(**S**)	(**F**)	(T)	($\underline{\mathrm{T}}$)	(¬¬)
SA, i	**F**A, i	TA, i	$\underline{\mathrm{T}}$A, i	¬¬A, i
↓	↓	↓	↓	↓
A, i	¬A, i	T, i	$\underline{\mathrm{T}}$, i	A, i

(¬**S**)	(¬**F**)	(¬T)	(¬$\underline{\mathrm{T}}$)	(CUT)
¬**S**A, i	¬**F**A, i	¬TA, i	¬$\underline{\mathrm{T}}$A, i	…
↓	↓	↓	↓	↙↘
¬A, i	A, i	$\underline{\mathrm{T}}$, i	T, i	A, i ¬A, i

Tabell 4

Notera att reglerna har ett index ”, i”. Detta är redundant i alla satslogiska system. Anledningen är att dessa regler också kan användas i t.ex. olika modala och temporala system. I sådana system är det väsentligt med ett index.

(CUT) (eller BRYT) regeln är en speciell regel som i många tablåsystem är redundant, t.ex. i det system som innehåller tablåreglerna ($\neg\neg$), ($\wedge$), ($\neg\wedge$), ($\vee$), ($\neg\vee$), ($\rightarrow$), ($\neg\rightarrow$), ($\leftrightarrow$), och ($\neg\leftrightarrow$). Allt som kan bevisas med hjälp av denna regel kan vanligtvis bevisas utan den. (CUT) regeln är emellertid mycket användbar om man är intresserad av att förenkla olika bevis. För med hjälp av (CUT) regeln kan man härleda följande regel:

Globala Hypotes Regeln. Om det finns ett tablåbevis för A (i systemet S), så får vi lägga till A till vilken öppen gren som helst i en (S-)tablå.

4.3.2.2. Regler för binära konnektiv

($\rightarrow$)	($\underline{\rightarrow}$)	($\leftarrow$)	($\underline{\leftarrow}$)
$A \rightarrow B$, i $\swarrow\searrow$ $\neg A$, i B, i	$A \underline{\rightarrow} B$, i $\downarrow$ A, i $\neg B$, i	$A \leftarrow B$, i $\swarrow\searrow$ A, i $\neg B$, i	$A \underline{\leftarrow} B$, i $\downarrow$ $\neg A$, i B, i
($\neg\rightarrow$)	($\neg\underline{\rightarrow}$)	($\neg\leftarrow$)	($\neg\underline{\leftarrow}$)
$\neg(A \rightarrow B)$, i $\downarrow$ A, i $\neg B$, i	$\neg(A \underline{\rightarrow} B)$, i $\swarrow\searrow$ $\neg A$, i B, i	$\neg(A \leftarrow B)$, i $\downarrow$ $\neg A$, i B, i	$\neg(A \underline{\leftarrow} B)$, i $\swarrow\searrow$ A, i $\neg B$, i

Tabell 5

($<$)	($\leq$)	($>$)	($\geq$)
$A < B$, i $\downarrow$ A, i	$A \leq B$, i $\downarrow$ $\neg A$, i	$A > B$, i $\downarrow$ B, i	$A \geq B$, i $\downarrow$ $\neg B$, i
($\neg<$)	($\neg\leq$)	($\neg>$)	($\neg\geq$)
$\neg(A < B)$, i $\downarrow$ $\neg A$, i	$\neg(A \leq B)$, i $\downarrow$ A, i	$\neg(A > B)$, i $\downarrow$ $\neg B$, i	$\neg(A \geq B)$, i $\downarrow$ B, i

Tabell 6

$(\leftrightarrow)$	$(\underline{\leftrightarrow})$	$(\top)$	$(\underline{\top})$
$(A \leftrightarrow B)$, i	$A \underline{\leftrightarrow} B$, i	$(A \top B)$, i	$(A \underline{\top} B)$, i
↙↘	↙↘	↓	↓
A, i $\neg$A, i B, i $\neg$B, i	A, i $\neg$A, i $\neg$B, i B, i	$\top$, i	$\underline{\top}$, i
$(\neg\leftrightarrow)$	$(\neg\underline{\leftrightarrow})$	$(\neg\top)$	$(\neg\underline{\top})$
$\neg(A \leftrightarrow B)$, i	$\neg(A \underline{\leftrightarrow} B)$, i	$\neg(A \top B)$, i	$\neg(A \underline{\top} B)$, i
↙↘	↙↘	↓	↓
A, i $\neg$A, i $\neg$B, i B, i	A, i $\neg$A, i B, i $\neg$B, i	$\underline{\top}$, i	$\top$, i

Tabell 7

$(\wedge)$	$(\triangle)$	$(\vee)$	$(\underline{\vee})$
$(A \wedge B)$, i	$A \triangle B$, i	$(A \vee B)$, i	$A \underline{\vee} B$, i
↓	↙↘	↙↘	↓
A, i B, i	$\neg$A, i $\neg$B, i	A, i B, i	$\neg$A, i $\neg$B, i
$(\neg\wedge)$	$(\neg\triangle)$	$(\neg\vee)$	$(\neg\underline{\vee})$
$\neg(A \wedge B)$, i	$\neg(A \triangle B)$, i	$\neg(A \vee B)$, i	$\neg(A \underline{\vee} B)$, i
↙↘	↓	↓	↙↘
$\neg$A, i $\neg$B, i	A, i B, i	$\neg$A, i $\neg$B, i	A, i B, i

Tabell 8

4.3.2.3. Några härledda regler

Det är ofta möjligt att bevisa ett antal härledda regler i olika tablåsystem. Härledda regler kan användas för att förkorta olika tablåbevis. Nedan följer en lista på några sådana regler som är härledbara i många olika fullständiga tablåsystem. Alla regler i Tabell 9 och 10 är t.ex. härledbara i alla tablåsystem som innehåller tablåreglerna $(\neg\neg)$, $(\wedge)$, $(\neg\wedge)$, $(\vee)$, $(\neg\vee)$, $(\rightarrow)$, $(\neg\rightarrow)$, $(\leftrightarrow)$, och $(\neg\leftrightarrow)$. Med hjälp av Globala Hypotes Regeln kan man härleda en mängd andra intressanta tablåregler. Reglerna i Tabell 9 svarar mot några mycket välkända slutledningsregler som har varit kända mycket länge.

Förklaring av förkortningar i Tabell 9. MP: Modus ponens; MT: Modus tollens; DS: Disjunktiv syllogism; CS: Konjunktiv syllogism; EE: Ekvivalenselimination; HS: Hypotetisk syllogism.

(MP)	(MT)	(DSI)
$A \to B$, i A, i $\downarrow$ B, i	$A \to B$, i $\neg B$, i $\downarrow$ $\neg A$, i	$A \lor B$, i $\neg A$, i $\downarrow$ B, i
(DSII)	(CSI)	(CSII)
$A \lor B$, i $\neg B$, i $\downarrow$ A, i	$\neg(A \land B)$, i A, i $\downarrow$ $\neg B$, i	$\neg(A \land B)$, i B, i $\downarrow$ $\neg A$, i
(EEI)	(EEII)	(EEIII)
$A \leftrightarrow B$, i A, i $\downarrow$ B, i	$A \leftrightarrow B$, i B, i $\downarrow$ A, i	$A \leftrightarrow B$, i $\neg A$, i $\downarrow$ $\neg B$, i
(EEIV)	(HS)	(HS’)
$A \leftrightarrow B$, i $\neg B$, i $\downarrow$ $\neg A$, i	$A \to B$, i $B \to C$, i $\swarrow \searrow$ $\neg A$, i C, i	A, i $A \to B$, i $B \to C$, i $\downarrow$ C, i

Tabell 9

4.3.2.4. Fler härledda regler

(-→)	(¬→-)	(¬-∧)
$\neg A \to B$, i $\swarrow \searrow$ A, i B, i	$\neg(A \to \neg B)$, i $\downarrow$ A, i B, i	$\neg(\neg A \land B)$, i $\swarrow \searrow$ A, i $\neg B$, i
(¬-∨-)	(¬-∧-)	(¬-∨)
$\neg(\neg A \lor \neg B)$, i $\downarrow$ A, i B, i	$\neg(\neg A \land \neg B)$, i $\swarrow \searrow$ A, i B, i	$\neg(\neg A \lor B)$, i $\downarrow$ A, i $\neg B$, i

$(\neg\vee\text{-})$	$(\neg\wedge\text{-})$	$(\vee\rightarrow)$
$\neg(A\vee\neg B)$, i	$\neg(A\wedge\neg B)$, i	$(A\vee B)\rightarrow C$, i
$\downarrow$	$\swarrow\ \searrow$	A, i
$\neg A$, i	$\neg A$, i B, i	B, i
B, i		$\downarrow$
		C, i

Tabell 10

4.4. Grundläggande bevisteoretiska begrepp

Låt oss nu definiera ett antal grundläggande bevisteoretiska begrepp. Dessa begrepp är relativiserade till särskilda system. När vi t.ex. säger att en viss sats är bevisbar, så menar vi att den är bevisbar i ett visst system. Om det av kontexten framgår vilket system vi talar om, kan vi dock utelämna denna information, och helt enkelt säga att en sats är bevisbar osv.

Tablåsystem. Ett (semantiskt) tablåsystem är en mängd (semantiska) tablåregler. S$\{X_1, \ldots, X_n\}$ betecknar det tablåsystem som innehåller tablåreglerna $X_1, \ldots, X_n$. S$\{\neg\neg, \wedge, \neg\wedge, \vee, \neg\vee, \rightarrow, \neg\rightarrow, \leftrightarrow, \neg\leftrightarrow\}$ är t.ex. det tablåsystem som innehåller tablåreglerna $(\neg\neg)$, $(\wedge)$, $(\neg\wedge)$, $(\vee)$, $(\neg\vee)$, $(\rightarrow)$, $(\neg\rightarrow)$, $(\leftrightarrow)$, och $(\neg\leftrightarrow)$. Inte alla tablåsystem är sunda och fullständiga (se Avsnitt 6). S$\{\wedge, \neg\neg\}$ är t.ex. inte sunt och fullständigt. Men det finns många tablåsystem som är sunda och fullständiga. S$\{\neg\neg, \wedge, \neg\wedge, \vee, \neg\vee, \rightarrow, \neg\rightarrow, \leftrightarrow, \neg\leftrightarrow\}$ är ett exempel på ett system som är sunt och fullständigt.

S-tablå. En S-tablå är en semantisk tablå som har genererats i enlighet med tablåreglerna i S, där S är ett tablåsystem.

Bevisbarhet. En sats A är bevisbar (i systemet S) omm det finns en sluten (S-)tablå som börjar med $\neg A$.

Teorem. En sats A är ett teorem (i systemet S) omm A är bevisbar (i S).

Konsistens. En mängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ är konsistent (i systemet S) omm det finns minst en öppen avslutad gren i en (S-)tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$. En mängd satser är **inkonsistent** omm den inte är konsistent.

Härledbarhet. En sats B är härledbar ur en mängd satser $\{A_1,\ldots,A_n\}$ (i systemet S) omm det finns en sluten (S-)tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$, $\neg B$.

4.5. Användningsområden för semantiska tablåsystem

Semantiska tablåsystem är mycket användbara. I det här avsnittet går jag igenom hur de bl.a. kan användas för att avgöra en mängd logiska egenskaper och relationer. När jag talar om ”semantiska tablåer” i det här avsnittet, så menar jag tablåer i något system som är sunt och fullständigt (se Avsnitt 6). Nedan följer en lista på några logiska egenskaper och relationer. Därefter följer en beskrivning av hur man kan avgöra om en viss sats (mängd satser) har denna egenskap eller inte, eller om olika satser står i denna relation till varandra eller inte.

Logisk sanning. Hur avgör man om en sats A är logiska sann eller inte? Skapa en semantisk tablå för ¬A. Om alla grenar i denna är slutna, så är A ett teorem. Och om A är ett teorem, så är A logisk sann. Om det finns åtminstone en öppen avslutad gren på den semantiska tablån för ¬A, så är A inte logiskt sann, ¬A är då satisfierbar.

Logisk falskhet. Hur avgör man om en sats A är logiskt falsk eller inte? Skapa en semantisk tablå som börjar med A. Om alla grenar är slutna, så kan inte A vara sann. Det finns ingen värdering som gör A sann. Alltså måste A vara falsk. Alltså är A logiskt falsk. Om det finns åtminstone en öppen avslutad gren på den semantiska tablån för A, så är A inte logiskt falsk; då är A satisfierbar.

Logisk kontingens. Hur avgör man om en sats A är logiskt kontingent eller inte? För att visa att A är logiskt kontingent, visa att A varken är logiskt sann eller logiskt falsk. A är logiskt kontingent omm det finns minst en öppen avslutad gren på tablån för ¬A och minst en öppen avslutad gren på tablån för A. Om A är logiskt sann eller logiskt falsk, så är A inte logiskt kontingent.

Det gäller för varje sats att den antingen är logiskt sann, logiskt falsk, eller logiskt kontingent. Om en sats är logiskt sann, så är den inte logiskt falsk eller logiskt kontingent; om en sats är logiskt falsk, så är den inte logiskt sann eller logiskt kontingent; och om en sats är logiskt kontingent, så är den inte logiskt sann eller logiskt falsk.

Logisk implikation. Hur avgör man om en sats A logiskt implicerar en sats B eller inte? Skapa en semantisk tablå som börjar med A och ¬B. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är det inte möjligt att A är sann och B falsk. Med andra ord, varje värdering som gör A sann gör också B sann. Alltså implicerar A B logiskt. Om det finns minst en öppen avslutad gren på en tablå som börjar med A och ¬B, så är det inte fallet att A logiskt implicerar B, då finns det en värdering som gör A sann och B falsk.

Logisk ekvivalens. Hur avgör man om två satser A och B är logiskt ekvivalenta eller inte? Visa att A (logiskt) implicerar B och att B (logiskt) implicerar A. Om A implicerar B och B implicerar A, så är A och B logiskt ekvivalenta. Ett alternativ: skapa en tablå som börjar med ¬(A↔B). Om alla grenar i denna tablå är slutna så är $A \leftrightarrow B$ ett teorem och alltså logiskt sann. Och om $A \leftrightarrow B$ är logiskt sann, så är A och B logiskt ekvivalenta. Om det finns minst en öppen avslutad gren på tablån för $\neg(A \leftrightarrow B)$, så är A och B inte logiskt ekvivalenta.

Satisfierbarhet hos en mängd satser. Hur avgör man om en mängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ är satisfierbar eller inte? Skapa en semantisk tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$. Om det finns åtminstone en öppen avslutad gren i denna tablå, så är $\{A_1, \ldots, A_n\}$ konsistent. Det följer att $\{A_1, \ldots, A_n\}$ är satisfierbar. Om en mängd satser inte är konsistent så är den inte satisfierbar. För att visa att en mängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ inte är satisfierbar kan vi då gå tillväga på följande sätt. Skapa en tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är $\{A_1, \ldots, A_n\}$ inkonsistent. Det följer att denna mängd inte är satisfierbar; dvs. det finns ingen värdering som gör alla satser i denna mängd sanna.

Giltighet hos ett argument. Hur avgör man om ett argument med premisserna $A_1, \ldots, A_n$ och slutsatsen B är logiskt giltigt eller inte? Skapa en tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n, \neg B$. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är slutsatsen härledbar ur premisserna. Givet att systemet är sunt, så följer slutsatsen ur premisserna. Med andra ord, då är argumentet giltigt. Det finns ingen värdering som gör alla premisser sanna och slutsatsen falsk. Ogiltigheten hos ett argument med premisserna $A_1, \ldots, A_n$ och slutsatsen B visas på liknande sätt. Ett argument är ogiltigt omm det inte är giltigt. Skapa en tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n, \neg B$. Om det finns åtminstone en öppen avlutade gren i denna tablå, så är det inte fallet att B är härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Alltså är det inte fallet att B följer ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$. För vi utgår ifrån ett system som är sunt och fullständigt. Då finns det åtminstone en värdering som gör alla premisser sanna och slutsatsen falsk. Alltså, det är inte fallet att argumentet är giltigt.

Semantiska tablåer kan användas för att hitta motexempel, värderingar eller modeller som visar att en sats inte är logiskt sann eller att ett argument inte är logiskt giltigt. Denna metod beskrivs i de flesta introduktioner till semantiska tablåer. De kan också ha andra användningsområden. För varje sats A kan de t.ex. användas för att hitta en sats A’ i s.k. disjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med A.

4.6. Exempel på bevis

Det är välkänt hur semantiska tablåer kan användas för att bevisa olika satser. Jag skall ändå ta upp ett par exempel. Vi skall börja med att bevisa $p \vee (p \veebar p)$

i systemet S$\{\neg\neg, \veebar, \neg\veebar\}$, baserat på språket L$\{\neg, \veebar\}$, där övriga monadiska och binära konnektiv är definierade som i Avsnitt 2.3. För att göra det måste vi först översätta $p \vee (p \veebar p)$ till primitiv notation. Satsen $p \vee (p \veebar p)$ är ekvivalent med $(p \veebar (p \veebar p)) \veebar (p \veebar (p \veebar p))$ i primitiv notation. För att bevisa denna sats skapar vi en sluten tablå för dess negation.

(1) $\neg((p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p)))$

$\swarrow \searrow$

(2) $p\veebar(p\veebar p)$ [1, $\neg\veebar$]	(3) $p\veebar(p\veebar p)$ [1, $\neg\veebar$]
(4) $\neg p$ [2, $\veebar$]	(5) $\neg p$ [3, $\veebar$]
(6) $\neg(p\veebar p)$ [2, $\veebar$]	(7) $\neg(p\veebar p)$ [3, $\veebar$]
$\swarrow \quad \searrow$	$\swarrow \quad \searrow$

(8) p [6, $\neg\veebar$]	(9) p [6, $\neg\veebar$]	(10) p [7, $\neg\veebar$]	(11) p [7, $\neg\veebar$]
(12) * [4, 8]	(13) * [4, 9]	(14) * [5, 10]	(15) * [5, 11]

Tabellen ovan är ett bevis för $(p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p))$. $(p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p))$ är alltså ett teorem i S$\{\neg\neg, \veebar, \neg\veebar\}$. Allt som kan bevisas i detta system är (sats)logiskt sant; S$\{\neg\neg, \veebar, \neg\veebar\}$ är ett sunt system. Det följer att vår ursprungliga sats $p\vee(p\veebar p)$ [= $(p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p))$] är (sats)logiskt sann.

Här följer ett annat exempel på ett bevis av satsen $(p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q)$. Vi använder i det här fallet ett system som innehåller alla tablåregler som vi har tagit upp i den här uppsatsen.

(1) $\neg((p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q))$

$\swarrow \quad \searrow$

(2) $(p\triangle q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]	(3) $\neg(p\triangle q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]
(4) $\neg\neg(\neg p\veebar\neg q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]	(5) $\neg(\neg p\veebar\neg q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]
(6) $\neg p\veebar\neg q$ [4, $\neg\neg$]	(7) p [3, $\neg\triangle$]
(8) $\neg\neg p$ [6, $\veebar$]	(9) q [3, $\neg\triangle$]
(10) $\neg\neg q$ [6, $\veebar$]	$\swarrow \quad \searrow$
$\swarrow \quad \searrow$	(11) $\neg p$ [5, $\neg\veebar$] (12) $\neg q$ [5, $\neg\veebar$]
(13) $\neg p$ [2, $\triangle$] (14) $\neg q$ [2, $\triangle$]	(15) * [7, 11] (16) * [9, 12]
(17) * [8, 13] (18) * [10, 14]	

Ovanstående tablå är ett bevis för $(p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q)$ i vårt system. Denna sats är därför både bevisbar och ett teorem i vårt system. Eftersom detta system är sunt följer det att $(p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q)$ är (sats)logisk sann. För allt som kan bevisas i ett sunt system är (sats)logiskt sant.

5. Några satslogiska sanningar

Det här avsnittet innehåller en lista på några satslogiska sanningar. I många fall är dessa lagar så etablerade att de har fått särskilda namn. Jag använder satsbokstäver: p, q, r… osv. i alla formler nedan, men tack vare den simultana substitutionsregeln följer det att dessa lagar gäller för alla A, B, C… osv. Motsägelselagen, $\neg(p\wedge\neg p)$, gäller t.ex. inte bara för p, utan för alla A, dvs. $\neg(A\wedge\neg A)$ för alla A. Detsamma gäller övriga sanningar nedan.

Lagarna nedan kan användas för att härleda ett antal satslogiskt sunda regler. Om ”$A\rightarrow B$” är ett teorem och ”A” är ett teorem, så följer det att ”B” är ett teorem. Mer allmänt gäller det att om ”$(A_1\wedge\ldots\wedge A_n)\rightarrow B$” är ett teorem, ”$A_1$” är ett teorem och … och ”A_n” är ett teorem, så är ”B” ett teorem. (Övning: bevisa alla satser i det här avsnittet.)

Grundläggande lagar

$p\leftrightarrow p$	Identitetslagen
$\neg(p\wedge\neg p)$	Motsägelselagen
$p\vee\neg p$	Lagen om det uteslutna tredje
$p\leftrightarrow\neg\neg p$	Lagen om dubbel negation

Idempotenslagar

$p\leftrightarrow(p\vee p)$	Idempotenslagen för disjunktion
$p\leftrightarrow(p\wedge p)$	Idempotenslagen för konjunktion

Absorptionslagar

$(p\vee(p\wedge q))\leftrightarrow p$	$(p\wedge\mathrm{T})\leftrightarrow p$	$(p\rightarrow\mathrm{T})\leftrightarrow\mathrm{T}$
$(p\wedge(p\vee q))\leftrightarrow p$	$(p\wedge\underline{\mathrm{T}})\leftrightarrow\underline{\mathrm{T}}$	$(p\rightarrow\underline{\mathrm{T}})\leftrightarrow\neg p$
$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\leftrightarrow p$	$(p\vee\mathrm{T})\leftrightarrow\mathrm{T}$	$(\mathrm{T}\rightarrow p)\leftrightarrow p$
$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\leftrightarrow p$	$(p\vee\underline{\mathrm{T}})\leftrightarrow p$	$(\underline{\mathrm{T}}\rightarrow p)\leftrightarrow\mathrm{T}$
$((q\rightarrow p)\wedge(\neg q\rightarrow p))\leftrightarrow p$	$(\neg p\rightarrow p)\leftrightarrow p$	$(p\leftrightarrow\mathrm{T})\leftrightarrow p$
$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q))\leftrightarrow\neg p$	$(p\rightarrow\neg p)\leftrightarrow\neg p$	$(p\leftrightarrow\underline{\mathrm{T}})\leftrightarrow\neg p$

Grundläggande lagar för Verum och Falsum

$\neg\mathrm{T}\leftrightarrow\underline{\mathrm{T}}$	$\underline{\mathrm{T}}\rightarrow A$	$\mathrm{T}\leftrightarrow(p\vee\neg p)$
$\neg\underline{\mathrm{T}}\leftrightarrow\mathrm{T}$	$A\rightarrow\mathrm{T}$	$\underline{\mathrm{T}}\leftrightarrow(p\wedge\neg p)$

Kommutativa, Associativa och Distributiva lagar

$(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$	$((p\vee q)\vee r)\leftrightarrow(p\vee(q\vee r))$	$(p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
$(p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$	$((p\wedge q)\wedge r)\leftrightarrow(p\wedge(q\wedge r))$	$(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

De Morgans lagar[6]

$(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)$	$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$
$(p\vee q)\leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)$	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

Adjunktionslagen (AL), Importlagen (IL),
exportlagen (EL), kompositionslagar, dekompositionslagar

$p\rightarrow(q\rightarrow(p\wedge q))$ (AL)	$(p\rightarrow q)\rightarrow((r\rightarrow s)\rightarrow((p\wedge r)\rightarrow(q\wedge s)))$
$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\wedge q)\rightarrow r)$ (IL)	$(p\rightarrow q)\rightarrow((r\rightarrow s)\rightarrow((p\vee r)\rightarrow(q\vee s)))$
$((p\wedge q)\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$ (EL)	$(p\rightarrow(q\wedge r))\rightarrow((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))$
$((p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$	$((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))$
$(p\rightarrow q)\rightarrow((p\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow(q\wedge r)))$	$(p\rightarrow(q\wedge r))\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))$
$(p\rightarrow r)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow((p\vee q)\rightarrow r))$	$((p\vee q)\rightarrow r)\leftrightarrow((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))$

Modus ponens (MP), modus tollens (MT),
påståendelagen (PL), reductio ad absurdumlagen (RL)

$(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$ (MP)	$p\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow q)$ (PL)
$((p\rightarrow q)\wedge\neg q)\rightarrow\neg p$ (MT)	$(p\rightarrow q)\rightarrow((p\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg p)$ (RL)

Implikationslagar, reflexivitet,
transitivitet/hypotetisk syllogism, permutationslagen, självdistribution

$p\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$	$(q\rightarrow r)\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow\neg(p\wedge\neg q)$	$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\leftrightarrow(q\rightarrow(p\rightarrow r))$
$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$	$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$
$\neg(p\rightarrow\neg q)\leftrightarrow(p\wedge q)$	$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\leftrightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$

Kontrapositionslagar

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$	$(\neg p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow p)$
$(p\rightarrow\neg q)\leftrightarrow(q\rightarrow\neg p)$	$(\neg p\rightarrow\neg q)\leftrightarrow(q\rightarrow p)$

Ekvivalenslagar

$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow\neg q)$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow p)$
$(\neg p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$	$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))$
$(p\leftrightarrow\neg q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$	$(p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r))\leftrightarrow((p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r)$
$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((q\leftrightarrow r)\rightarrow(p\leftrightarrow r))$

[6] Lagarna har fått namn efter Augustus DeMorgan (1806–1871), men tycks ha varit kända åtminstone sedan medeltiden (Łukasiewicz (1935)).

$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\leftrightarrow r)\rightarrow(q\leftrightarrow r))$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\leftrightarrow r)\leftrightarrow(q\leftrightarrow r))$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((r\leftrightarrow p)\leftrightarrow(r\leftrightarrow q))$

Kongruenslagar

$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\wedge r)\leftrightarrow(q\wedge r))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\rightarrow r)\leftrightarrow(q\rightarrow r))$
$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\vee r)\leftrightarrow(q\vee r))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((r\rightarrow p)\leftrightarrow(r\rightarrow q))$

Försvagning av eftersatsen, förstärkning av försatsen,
bejakande av eftersatsen, förnekande av eftersatsen, explosionslagen

$p\rightarrow(p\vee q)$	$(p\wedge q)\rightarrow p$	$p\rightarrow(q\rightarrow p)$
$q\rightarrow(p\vee q)$	$(p\wedge q)\rightarrow q$	$\neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$
$(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow(q\vee r))$	$(p\rightarrow r)\rightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$	$(p\wedge\neg p)\rightarrow q$

Disjunktiv syllogism, konjunktiv syllogism,
”Peirces lag”, implikationsparadoxen, dilemmatiska syllogismer

$((p\vee q)\wedge\neg p)\rightarrow q$	$((p\vee q)\wedge((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow r$
$((p\vee q)\wedge\neg q)\rightarrow p$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow\neg(p\wedge q)$
$(\neg(p\wedge q)\wedge p)\rightarrow\neg q$	$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\rightarrow((\neg q\vee\neg r)\rightarrow\neg p)$
$(\neg(p\wedge q)\wedge q)\rightarrow\neg p$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((p\vee q)\rightarrow(r\vee s))$
$((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((\neg r\vee\neg s)\rightarrow(\neg p\vee\neg q))$
$(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow(\neg(r\wedge s)\rightarrow\neg(p\wedge q))$

Några satslogiska sanningar som innehåller $\underline{\vee}$ (NOR)

$(p\underline{\vee}q)\rightarrow\neg p$, $(p\underline{\vee}q)\rightarrow\neg q$, $(p\underline{\vee}p)\rightarrow\neg p$, $\neg p\rightarrow(p\underline{\vee}p)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(q\underline{\vee}q))\rightarrow(p\underline{\vee}p)$, $((p\rightarrow q)\wedge(q\underline{\vee}q))\rightarrow\neg p$,
$(\neg p\wedge(q\underline{\vee}r))\rightarrow((p\underline{\vee}q)\wedge(p\underline{\vee}r))$, $((p\underline{\vee}q)\wedge(r\underline{\vee}s))\rightarrow((p\underline{\vee}r)\wedge(q\underline{\vee}s))$,
$((p\rightarrow q)\wedge(q\underline{\vee}r))\rightarrow(p\underline{\vee}r)$, $((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\underline{\vee}s)\rightarrow(p\underline{\vee}q))$.

Några satslogiska sanningar som innehåller $\triangle$ (NAND)

$(p\triangle p)\rightarrow\neg p$, $\neg p\rightarrow(p\triangle p)$, $((p\triangle q)\wedge p)\rightarrow\neg q$, $((p\triangle q)\wedge q)\rightarrow\neg p$,
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\triangle\neg q)$, $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\triangle\neg q)\wedge(q\triangle\neg p))$, $((p\rightarrow q)\wedge(q\triangle r))\rightarrow(p\triangle r)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\triangle s)\rightarrow(p\triangle q))$, $((p\triangle r)\wedge(q\triangle\neg r))\rightarrow(p\triangle q)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow(p\triangle q)$, $((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q))\rightarrow(p\triangle p)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(q\triangle q))\rightarrow(p\triangle p)$, $(p\wedge(q\triangle q))\rightarrow\neg(p\rightarrow q)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(p\triangle q))\rightarrow(p\triangle p)$, $(p\wedge(p\triangle q))\rightarrow\neg(p\rightarrow q)$.

Några satslogiska sanningar som innehåller $\underline{\leftrightarrow}$ (XOR)

$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(p\vee q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow\neg(p\wedge q)$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(p\triangle q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(q\rightarrow\neg p)$,
$((p\underline{\leftrightarrow}q)\wedge p)\rightarrow\neg q$, $((p\underline{\leftrightarrow}q)\wedge q)\rightarrow\neg p$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$,
$(\neg p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}\neg q)\leftrightarrow(\neg p\underline{\leftrightarrow}q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\triangle q))$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow\neg((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg(p\rightarrow q)\vee\neg(q\rightarrow p))$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\underline{\rightarrow}q)\vee(q\underline{\rightarrow}p))$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\underline{\rightarrow}q)\vee(p\underline{\leftarrow}q))$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q))$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow((p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow r)$, $((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\rightarrow((\neg q\underline{\leftrightarrow}\neg r)\rightarrow\neg p)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(r\vee s))$, $((p\rightarrow q)\wedge(q\underline{\leftrightarrow}r))\rightarrow(p\triangle r)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\underline{\leftrightarrow}s)\rightarrow(p\triangle q))$, $((p\underline{\leftrightarrow}r)\wedge(q\underline{\leftrightarrow}\neg r))\rightarrow(p\underline{\leftrightarrow}q)$,
$((p\underline{\leftrightarrow}r)\wedge(p\underline{\leftrightarrow}\neg r))\rightarrow\neg p$, $((p\vee q)\wedge((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow(p\underline{\leftrightarrow}q)$,
$((p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\underline{\leftrightarrow}s)\rightarrow(p\underline{\leftrightarrow}q))$, $(p\underline{\leftrightarrow}p)\leftrightarrow\underline{T}$,
$(p\wedge(q\underline{\leftrightarrow}r))\leftrightarrow((p\wedge q)\underline{\leftrightarrow}(p\wedge r))$, $(q\leftrightarrow(p\underline{\leftrightarrow}r))\rightarrow((p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow r)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\rightarrow((\neg q\underline{\leftrightarrow}\neg r)\rightarrow\neg p)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((\neg r\underline{\leftrightarrow}\neg s)\rightarrow(p\triangle q))$.

DeMorgan liknande lagar

$(p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q)$	$\neg(p\triangle q)\leftrightarrow(\neg p\veebar\neg q)$
$(p\veebar q)\leftrightarrow\neg(\neg p\triangle\neg q)$	$\neg(p\veebar q)\leftrightarrow(\neg p\triangle\neg q)$
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow\neg(\neg p\leftrightarrow\neg q)$	$\neg(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow\neg q)$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow\neg(\neg p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$	$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$

Några övriga satslogiska sanningar

$(p\vee q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow q)$, $(p\wedge q)\leftrightarrow(p\underline{\rightarrow}(p\underline{\rightarrow}q))$, $(p\underline{\rightarrow}q)\leftrightarrow\neg(p\rightarrow q)$,
$(p\underline{\rightarrow}q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$, $(p\underline{\leftarrow}q)\leftrightarrow\neg(p\leftarrow q)$, $(p\underline{\leftarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\wedge q)$, $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(q\leftarrow p)$,
$(p\leftarrow q)\leftrightarrow(q\rightarrow p)$, $(p<q)\leftrightarrow p$, $(p<q)\leftrightarrow(p\wedge(q\vee\neg q))$, $(p<q)\leftrightarrow(p\wedge(q\rightarrow p))$,
$(p>q)\leftrightarrow q$, $(p>q)\leftrightarrow((p\vee\neg p)\wedge q)$, $(p>q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge q)$, $(p\leq q)\leftrightarrow\neg(p<q)$,
$(p\leq q)\leftrightarrow\neg p$, $(p\geq q)\leftrightarrow\neg(p>q)$, $(p\geq q)\leftrightarrow\neg q$.

6. Några metalogiska teorem

I det här avsnittet skall jag nämna några intressanta metalogiska teorem som gäller för satslogiken. Men jag kommer inte att gå igenom några bevis. En del resultat följer mer eller mindre omedelbart ur våra definitioner av grundläggande begrepp. En del kräver något längre bevis. Exakt hur de olika teoremen bevisas beror på vilken bevisteori vi använder. Beviset för att en viss axiomatisering av satslogiken är sund och fullständig ser givetvis annorlunda ut än beviset för att ett visst satslogiskt tablåsystem är sunt och fullständigt.[7] Jag använder följande symboler i det här avsnittet:

A, B: Satser.
Γ, Δ: Mängder av satser.
”∅” står för den tomma mängden; ”∪” för union.
S: Ett satslogiskt system (i regel sunt och fullständigt).
$B \in \Gamma$: B är ett element i Γ.
$\Gamma \vdash_S A$: A är härledbar ur Γ i S.
$\vdash_S B$: B är ett teorem i S (B är bevisbar i S).
$\mathrm{Con}_S\ \Gamma$: Γ är konsistent i S.
$\mathrm{InCon}_S\ \Gamma$: Γ är inkonsistent i S.
$\Gamma \Vdash B$: B följer (sats)logiskt ur Γ.
$\Vdash B$: B är (sats)logiskt sann (en tautologi).
Sat Γ: Γ är satisfierbar.

6.1. Sundhet och fullständighet

Vanligtvis vill vi att våra logiska system skall vara sunda och fullständiga. Sundhet tycks vara ett minimikrav på ett tillfredsställande system. Om ett system inte är sunt, kan vi bevisa för mycket i detta system: då kan vi bevisa satser som inte är logiskt sanna. Helst vill vi också att våra system skall vara fullständiga. Men detta tycks inte vara ett absolut krav. Om ett system inte är fullständigt, så är det för svagt: då kan vi inte bevisa alla satser som är logiskt sanna i detta system. Här följer definitioner av ”sundhet” och ”fullständighet”.

Svag sundhet. Ett system S är svagt sunt omm $\vdash_S B$ medför $\Vdash B$, dvs. omm alla satser som kan bevisas i systemet är (sats)logiskt sanna.

Svag fullständighet. Ett system S är svagt fullständigt omm $\Vdash B$ medför $\vdash_S B$, dvs. omm alla satser som är (sats)logiskt sanna kan bevisas i S.

Stark sundhet. Ett system S är starkt sunt omm $\Gamma \vdash_S B$ medför $\Gamma \Vdash B$, dvs. omm alla satser B som kan härledas ur Γ i S följer (sats)logiskt ur Γ.

[7] Vissa grundläggande metateorem och bevis kan man hitta i olika introduktioner till logiken, t.ex. i Barwise (1977b), Buss (1998b), Epstein (2006), Hunter (1971), Kleene (1952), Mendelson (1964), och Hodges (2001). För mer information om semantiska tablåer och metalogik, se referenserna i Avsnitt 4.2. Se också relevanta anvisningar i introduktionen.

Stark fullständighet. Ett system S är starkt fullständigt omm $\Gamma \Vdash B$ medför $\Gamma \vdash_S B$, dvs. omm alla satser B som följer (sats)logiskt ur Γ kan härledas ur Γ i S.

Om ett system är starkt sunt, så är det också svagt sunt. Om ett system är starkt fullständigt, så är det också svagt fullständigt.

Exempel. Som jag nämnde i Avsnitt 4.4 är många men inte alla system sunda och fullständiga. S$\{\neg\neg, \wedge, \neg\wedge, \vee, \neg\vee, \rightarrow, \neg\rightarrow, \leftrightarrow, \neg\leftrightarrow\}$ är ett exempel på ett system som är (starkt) sunt och (starkt) fullständigt. Alla axiomatiseringar som nämns i Appendixet är sunda och fullständiga. ■

6.2. Härledbarhet

Nedan följer några metateorem som handlar om härledbarhet.

Om $\Gamma \vdash_S B$ och $\Gamma \subseteq \Delta$, så $\Delta \vdash_S B$. Om en sats B är härledbar ur en mängd satser Γ i S och Γ är en delmängd av en mängd satser Δ, så är B härledbar ur Δ i S. Pga. denna egenskap brukar man säga att satslogiken är monoton.

$\Gamma \vdash_S B$ omm det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_S B$. En sats B är härledbar ur en mängd satser Γ i S omm det finns en ändlig delmängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att B är härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i S.

Om $B \in \Gamma$, så $\Gamma \vdash_S B$. Om en sats B är ett element i en mängd satser Γ, så är B härledbar ur Γ i S.

$\vdash_S B$ omm $\varnothing \vdash_S B$. En sats B är ett teorem i S omm B är härledbar ur den tomma mängden i S.

$\vdash_S B$ omm det för varje Γ, $\Gamma \vdash_S B$. En sats B är ett teorem i S omm B är härledbar ur vilken mängd satser Γ som helst i S.

Om $\Gamma \cup \{A\} \vdash_S B$, så $\Gamma \vdash_S A \rightarrow B$. Om B är härledbar ur unionen av Γ och $\{A\}$ i S, så är $A \rightarrow B$ härledbar ur Γ i S.

Om $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_S B$, så $\vdash_S (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. Om B är härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i S, så är $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ ett teorem i S.

Om $\Gamma \vdash_S A \rightarrow B$, så $\Gamma \cup \{A\} \vdash_S B$. Om $A \rightarrow B$ är härledbar ur Γ i S, så är B härledbar ur unionen av Γ och $\{A\}$ i S.

Om $\vdash_S (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$, så $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_S B$. Om $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är ett teorem i S, så är B härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i S.

$\Gamma \vdash_S B$ omm det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $\vdash_S (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. B är härledbar ur Γ i S om och endast om det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är ett teorem i S.

6.3. Logisk följd

Här följer några metateorem som handlar om logisk följd.

Om $B \in \Gamma$, så $\Gamma \Vdash B$. Om B är ett element i Γ, så följer B ur Γ.

$\Vdash B$ omm $\varnothing \Vdash B$. B är logiskt sann om och endast om B följer ur den tomma mängden.

$\Vdash B$ omm för varje Γ, $\Gamma \Vdash B$. B är logiskt sann om och endast om B följer ur vilken mängd satser som helst.

$\{A\} \Vdash B$ omm $\Vdash A \rightarrow B$. $\{A\}$ medför B om och endast om $A \rightarrow B$ är logiskt sann.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\} \Vdash B$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\}$ medför B.

$\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\} \Vdash B$ omm $\Vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. $\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\}$ medför B om och endast om $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är logiskt sann.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\Vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är logiskt sann.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \Vdash A_n \rightarrow B$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ medför $A_n \rightarrow B$.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\Vdash A_1 \rightarrow (\ldots(A_n \rightarrow B)\ldots)$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $A_1 \rightarrow (\ldots(A_n \rightarrow B)\ldots)$ är logiskt sann.

6.4. Konsistens och inkonsistens

Följande metateorem handlar om konsistens och inkonsistens.

$\text{InCon}_S\ \Gamma$ omm $\Gamma \vdash_S \bot$. Γ är inkonsistent i S om och endast om Falsum är härledbar ur Γ i S.

$\text{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns en ändlig delmängd Δ av Γ sådan att $\Delta \vdash_S \bot$. Γ är inkonsistent i S om och endast om det finns en ändlig delmängd Δ av Γ sådan att Falsum är härledbar ur Δ i S.

$\text{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $\vdash_S \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$. Γ är inkonsistent i S om och endast om det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att negationen av $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ är ett teorem i S.

$\text{InCon}_S\ \Gamma$ omm $\Gamma \vdash_S A$ för varje A. Γ är inkonsistent i S om och endast om vilken sats som helst är härledbar ur Γ i S.

$\text{Con}_S\ \Gamma$ omm inte $\Gamma \vdash_S A$ för varje A. Γ är konsistent i S om och endast om det inte är fallet att vilken sats som helst är härledbar ur Γ i S.

$\text{Con}_S\ \Gamma$ omm det inte finns något A sådant att både $\Gamma \vdash_S A$ och $\Gamma \vdash_S \neg A$. Γ är konsistent i S om och endast om det inte finns någon sats A sådan att både A och negationen av A är härledbara ur Γ i S.

$\mathrm{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns något A sådant att både $\Gamma \vdash_S A$ och $\Gamma \vdash_S \neg A$. Γ är inkonsistent i S om och endast om det finns en sats A sådan att både A och negationen av A är härledbara ur Γ i S.

$\Gamma \vdash_S A$ omm $\mathrm{InCon}_S\ \Gamma \cup \{\neg A\}$. A är härledbar ur Γ i S om och endast om unionen av Γ och $\{\neg A\}$ är inkonsistent i S.

$\Gamma \vdash_S \neg A$ omm $\mathrm{InCon}_S\ \Gamma \cup \{A\}$. Negationen av A är härledbar ur Γ i S om och endast om unionen av Γ och $\{A\}$ är inkonsistent i S.

$\mathrm{Con}_S\ \Gamma \cup \{\neg A\}$ omm inte $\Gamma \vdash_S A$. Unionen av Γ och $\{\neg A\}$ är konsistent om och endast om det inte är fallet att A är härledbar ur Γ i S.

$\mathrm{Con}_S\ \Gamma$ omm för varje ändlig delmängd Δ av Γ, $\mathrm{Con}_S\ \Delta$. Γ är konsistent i S om och endast om varje ändlig delmängd av Γ är konsistent i S.

$\mathrm{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns en ändlig delmängd Δ av Γ, $\mathrm{InCon}_S\ \Delta$. Γ är inkonsistent i S om och endast om någon ändlig delmängd av Γ är inkonsistent i S.

6.5. Satisfierbarhet

Låt oss slutligen nämna några metateorem som handlar om satisfierbarhet.

Sat Γ omm inte $\Gamma \Vdash \underline{\top}$. En mängd satser Γ är satisfierbar om och endast om det inte är fallet att Falsum följer ur Γ.

Sat $\Gamma \cup \{\neg A\}$ omm inte $\Gamma \Vdash A$. Unionen av Γ och $\{\neg A\}$ är satisfierbar om och endast om det inte är fallet att A följer ur Γ.

$\Gamma \Vdash A$ omm inte Sat $\Gamma \cup \{\neg A\}$. A följer ur Γ om och endast om det inte är fallet att unionen av Γ och $\{\neg A\}$ är satisfierbar.

Sat Γ omm det inte finns något A sådant att både $\Gamma \Vdash A$ och $\Gamma \Vdash \neg A$. Γ är satisfierbar om och endast om det inte finns någon sats A sådan att både A och inte-A följer ur Γ.

Appendix

Det här Appendixet innehåller tre möjliga axiomatiseringar av satslogiken. Alla dessa är sunda och fullständiga.

$\mathbf{SL_1}$ (efter Frege (1879))

Axiom

(A1) $p \to (q \to p)$, (A2) $(r \to (q \to p)) \to ((r \to q) \to (r \to p))$, (A3) $(r \to (q \to p)) \to (q \to (r \to p))$, (A4) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$, (A5) $\neg\neg p \to p$, och (A6) $p \to \neg\neg p$.

Slutledningsregler
Modus Ponens (Om A är ett element i $\mathbf{SL_1}$ och $A \to B$ är ett element i $\mathbf{SL_1}$, så är också B det).
Substitutionsregeln (se Avsnitt 4.1).

$\mathbf{SL_2}$ (efter Whitehead och Russell (1910))
Axiom
(A1) $(p \lor p) \to p$, (A2) $q \to (p \lor q)$, (A3) $(p \lor q) \to (q \lor p)$, och (A4) $(q \to r) \to ((p \lor q) \to (p \lor r))$.

Slutledningsregler
Modus Ponens och Substitutionsregeln.

$\mathbf{SL_2}$ är väsentligen den version av satslogiken som utvecklas i Principia Mathematica (se Whitehead & Russell (1910), ss. 12–14 och 91–97). Whitehead och Russell inkluderar axiomet $(p \lor (q \lor r)) \to (q \lor (p \lor r))$ i sitt system. Men Paul Bernays har visat att denna sats är redundant i ljuset av övriga axiom (Bernays (1926)).

$\mathbf{SL_3}$ (efter Church (1956), ss. 119–120)
Axiom
(A1) $p \to (q \to p)$, (A2) $(s \to (p \to q)) \to ((s \to p) \to (s \to q))$, och (A3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$.

Slutledningsregler
Modus Ponens och Substitutionsregeln.

Kommentar. Såvitt jag vet har Figur 1–3 i den här uppsatsen inte publicerats tidigare. Sambanden som uttrycks i Figur 1 har emellertid uppmärksammats bl.a. av en forskare vid namn David Miller. Figur 2 och 3 är såvitt jag vet helt nya.

Referenser

Anderson, A. R. & Johnstone, H. W. (1962). *Natural Deduction: The Logical Basis of Axiom Systems*. Belmont, California: Wadsworth Publishing Company.

Anderson, D. & Zalta, E. (2004). Frege, Boolos, and logical objects. *Journal of Philosophical Logic*, 33, ss. 1–26.

Barwise, J. (red.). (1977). *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: Elsevier.

Barwise, J. (1977b). An Introduction to First-Order Logic. I *Barwise* (red.) (1977), ss. 5–46.

Bernays, P (1926). Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der "Principia Mathematica". *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 25, Nr. 1, ss. 305–320.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde, N.S., Vol. 18, nr. 13. Amsterdam: 309–42. Tryckt på nytt i *Hintikka* (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Biggs, N. L. (2002). *Discrete Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Bimbó, K. (2010). Schönfinkel-type Operators for Classical Logic. *Studia Logica*, Vol. 95, Nr. 3, ss. 355–378.

Bonevac, D. (2003). *Deduction: Introductory Symbolic Logic*. Oxford: Blackwell Publishing.

Bostock, D. (1997). *Intermediate Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Buss, S. (red.). (1998). *Handbook of Proof Theory*. University of California, San Diego, Elsevier.

Buss, S. (1998b). An Introduction to Proof Theory. I *S. Buss* (1998), ss. 1–78.

Church, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, tenth printing 1996.

Copi, I. M. & Cohen, C. (2002). *Introduction to Logic*. New Jersey: Prentice Hall. 11th edition.

D'Agostino, M. (1999). Tableau Methods for Classical Propositional Logic. I *D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R. & Posegga, J.* (red.). (1999), ss. 45–123.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R. & Posegga, J. (red.). (1999). *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Enderton, H. B. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic*. University of California, Los Angeles, Harcourt/Academic Press.

Epstein, R. L. (2006). *Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundations of Logic*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Fitting, M. (1999). Introduction. I *M. D'Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle & J. Posegga* (red.). (1999), ss. 1–43.

Frege, G. F. L. (1879). *Begriffsschrift*. Halle: Verlag von Louis Nebert.

Frege, G. F. L. (1995). *Skrifter i Urval*. Stockholm: Thales.

Gabbay, D. M. & Guenthner, F. (red.). (2001). *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd Edition. Vol. 2. Dordecht: Kluwer Academic Publishers.

Gabriel, G. (1984). Fregean Connection: Bedeutung, Value and Truth-Value. *The Philosophical Quarterly*. Vol. 34, Nr. 136, Special Issue: Frege, ss. 372–376.

Gentzen, G. (1935a). Untersuchungen über das Logische Schliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning, Investigations into Logical Deduction, i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Schliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning, Investigations into Logical Deduction, i Szabo (1969).

Haack, S. (1974). *Deviant Logic, Fuzzy Logic*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Hintikka, J. (1955). Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* 8, ss. 8–55.

Hodges, W. (2001). Elementary Predicate Logic. I D. M. Gabbay & F. Guenthner, (red.). (2001). *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd Edition. Vol. 1, Dordecht: Kluwer Academic Publishers, ss. 1–129.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford Readings in Philosophy. Oxford: Oxford University Press.

Hunter, G. (1971). *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*. California: University of California Press.

Hähnle, R. (2001). Advanced Many-valued Logics. I *D. M. Gabbay & F. Guenthner* (red.) (2001), ss. 297–395.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.

Kirkham, R. L. (1992). *Theories of Truth: A Critical Introduction*. Cambridge Massachusetts.

Kleene, S. C. (1952). *Introduction to Metamathematics*. Princeton: Van-Nostrand.

Künne, W. (2003). *Conceptions of Truth*. Oxford: Clarendon Press.

Layman, S. C. (2002). *The Power of Logic*. McGraw-Hill.

Lepore, E. (2000). *Meaning and Argument: An Introduction to Logic Through Language*. Blackwell Publishing, Revised Edition 2003.

Lis, Z. (1960). Wynikanie Semantyczne a Wynikanie Formalne (Logical Consequence, Semantic and Formal). *Studia Logica*, Vol. 10, ss. 39–60.

Łukasiewicz, J. (1935). Zur Geschichte der Aussagenlogik. *Erkenntnis*, Vol. 5, ss. 111–131.

Nicod, J. (1917–20). A reduction in the number of primitive propositions of logic. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 19, ss. 32–44.

Mendelson, E. (1964). *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, fourth edition, 1997.

Mårtensson, B. (1993). *Logik: En Introduktion*. Lund: Studentlitteratur.

Pelletier, F. J., och Norman M. M. (1990). 'Post's functional completeness theorem'. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31, ss. 462–475.

Post, E. L. (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, Vol. 43, ss. 163–185.

Prawitz, D. (1991). *ABC i Symbolisk Logik: Logikens Språk och Grundbegrepp*. Stockholm: Thales.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1955). *Formal Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Quine, W. V. (1950). *Methods of Logic*. Cambridge Mass: Harvard University Press. Fourth Edition, 1982.

Rönnedal, D. (2012). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.

Schönfinkel, M. (1924/1967). 'On the building blocks of mathematical logic', in J. van Heijenoort, (red.), From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Harvard University Press, Cambridge, MA, ss. 355–366.

Sheffer, H. M. (1913). A set of five independent postulates for Boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 14, ss. 481–488.

Shramko, Y. & Wansing, H. (red.). (2009). Truth Values, Part I. Special issue of *Studia logica*, Vol. 91, Nr. 3.

Shramko, Y. & Wansing, H. (red.). (2009b). Truth Values, Part II. Special issue of *Studia logica*, Vol. 92, Nr. 2.

Smullyan, R. M. (1963). A unifying Principle in Quantificational Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 49, 6, ss. 828–832.

Smullyan, R. M. (1965). Analytic Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic* 30, ss. 123–139.

Smullyan, R. M. (1966). Trees and Nest Structures. *Journal of Symbolic Logic* 31, ss. 303–321.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.

Sundholm, G. (2001). Systems of Deduction. I *D. M. Gabbay & F. Guenthner* (red.) (2001), ss. 1–52.

Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.

Thomason, R. (1970). *Symbolic Logic: An Introduction*. New York: Macmillan Publishing.

Urquhart, A. (2001). Basic Many-valued Logic. I *D. M. Gabbay & F. Guenthner* (red.) (2001), ss. 249–295.

Wernick, W. (1942). Complete Sets of Logical Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 51, Nr. 1, ss. 117–132.

Whitehead, A. N. & Russell, B. (1910). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press. Tre Vol. Second Ed. 1925, reprinted 1950.

Wittgenstein, L. (1921). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Översättning till svenska av Anders Wedberg, Thales.

Żyliński, E. (1925). Some remarks concerning the theory of deduction. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 7, ss. 203–209.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Konsistens, Inkonsistens och Strikt Implikation i Aletisk-Deontisk Logik

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Aletisk-deontisk logik är en typ av bimodallogik som innehåller två typer av modala operatorer: aletiska och deontiska. De aletiska operatorerna kan användas för att symbolisera uttryck såsom: ”Det är nödvändigt att”, ”Det är möjligt att” och ”Det är omöjligt att”; och de deontiska operatorerna kan användas för att formalisera uttryck såsom ”Det bör vara fallet att”, ”Det får vara fallet att” och ”Det är fel att”. Alla dessa uttryck symboliseras med hjälp av monadiska satsoperatorer. En monadisk satsoperator tar en sats som argument och ger en sats som värde. Jag har i tidigare arbeten beskrivit en mängd aletisk-deontiska system (Rönnedal (2012), (2012b), (2015b)). I den här uppsatsen visar jag hur man i dessa system kan definiera tre dyadiska satsoperatorer som kan användas för att säga att två propositioner (sakförhållanden) är konsistenta eller inkonsistenta eller att en proposition (ett sakförhållande) strikt implicerar (medför) en (annan) proposition (ett (annat) sakförhållande). En dyadisk satsoperator är en satsoperator som tar två satser som argument och ger en sats som värde. Jag åskådliggör hur man med hjälp av dessa definitioner kan härleda en mängd semantiska tablåregler. Dessutom bevisar jag flera intressanta teorem som innehåller uttrycken ”konsistens”, ”inkonsistens” och ”strikt implikation”.

1. Introduktion

Under senare delen av 1900-talet var modallogiker främst intresserade av modala ord såsom ”nödvändig”, ”möjlig” och ”omöjlig”. Sådana ord tycks kunna användas för att tillskriva propositioner eller sakförhållanden ett slags modala egenskaper. Satsen ”Det är nödvändigt att 2 + 2 = 4” tycks t.ex. kunna användas för att tillskriva propositionen (sakförhållandet) att 2 + 2 = 4 egenskapen att vara nödvändig (nödvändigt). En av modallogikens pionjärer, Clarence Irving Lewis, var emellertid lika eller mer intresserad av modala uttryck såsom ”konsistens”, ”inkonsistens” och ”strikt implikation” (Lewis (1918), Lewis & Langford (1932)). Konsistens, inkonsistens och logisk följd har ofta betraktats som ett slags metalogiska begrepp. Konsistens och inkonsistens är egenskaper hos mängder av satser och logisk följd en relation mellan mängder av satser och enskilda satser. I modern symbolisk logik relativiseras dessa begrepp ofta till olika formella system; man talar om konsistens, inkonsistens och logisk följd i relation till ett visst system. Sådana uttryck tycks emellertid även kunna användas för att tala om modala relationer mellan propositioner eller sakförhållanden. Satsen ”Påståendet att Sokrates är en människa som inte är förnuftig är inkonsistent med påståendet att alla människor är förnuftiga” tycks t.ex. kunna användas för att säga något om relationen mellan propositionen (sakförhållandet) att Sokrates är en människa som inte är förnuftig och propositionen (sakförhållandet) att alla människor är förnuftiga, nämligen att den förra inte är konsistent med den senare. Propositionen (sakförhållandet) att alla människor är förnuftiga djur tycks strikt implicera (medföra) propositionen (sakförhållandet) att Sokrates är ett förnuftigt djur. Lewis inför vissa dyadiska satsoperatorer som gör det möjligt att tala om konsistens, inkonsistens och strikt implikation direkt i ett objektspråk. Jag har i tidigare arbeten beskrivit en mängd aletisk-deontiska system (Rönnedal (2012), (2012b), (2015), (2015b), (2015c)). I den här uppsatsen visar jag hur man i dessa system kan definiera tre dyadiska satsoperatorer som kan användas för att säga att två propositioner (sakförhållanden) är konsistenta eller inkonsistenta eller att en proposition (ett sakförhållande) strikt implicerar (medför) en (annan) proposition (ett (annat) sakförhållande). En dyadisk satsoperator är en satsoperator som tar två satser som argument och ger en sats som värde. Jag åskådliggör hur man med hjälp av dessa definitioner kan härleda en mängd semantiska tablåregler. Dessutom bevisar jag flera intressanta teorem som innehåller uttrycken ”konsistens”, ”inkonsistens” och ”strikt implikation”.[1]

Uppsatsen är indelad i fem avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax. I Avsnitt 3 beskriver jag den semantik som är gemensam för alla system som beskrivs i den här artikeln. Avsnitt 4 handlar om bevisteori. Jag går igenom ett antal härledda tablåregler och ger prov på hur dessa kan användas i olika bevis. Avsnitt 5 innehåller en mängd intressanta teorem som involverar uttrycken ”konsistent”, ”inkonsistent” och ”strikt implikation”.

---

[1] För mer information om aletisk modallogik, se t.ex. Chellas (1980), Blackburn m.fl. (2001), Blackburn, van Benthem & Wolter (red.) (2007), Fitting & Mendelsohn (1998), Gabbay (1976), Gabbay & Guenthner (2001), Kracht (1999), Garson (2006), Girle (2000), Lewis & Langford (1932), Popkorn (1994), Segerberg (1971), och Zeman (1973). Gabbay m.fl. (2013), Hilpinen (1971), (1981), Rönnedal (2010) (2012b), och Åqvist (1987), (2002), innehåller mer information om deontisk logik. Se också Anderson (1956), (1958), (1959), (1967), Gabbay m.fl. (2003).

2. Syntax

Jag använder i grund och botten samma syntax som i Rönnedal (2015b). Den enda skillnaden är att jag introducerar ett antal nya definitioner i den här uppsatsen. Vårt språk L består av följande alfabet och satser.

2.1. Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion),
$\vee$ (disjunktion), $\supset$ (materiell implikation) och $\equiv$ (materiell ekvivalens).
De modala operatorerna $\Box$, $\Diamond$, och ⟠.
De deontiska operatorerna O, P och F.
Parenteser) och (.

2.2. Satser

Språket L består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor.

Varje satsbokstav är en (atomär) sats.
Om A och B är satser, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ och $(A \equiv B)$ satser.
Om B är en sats, så är också $\neg B$, $\Box B$, $\Diamond B$, ⟠B, OB, PB, och FB satser.
Ingenting annat är en sats.

2.3 Definitioner

$\boxminus B =_{df} \neg\Box B$, $(A \bigcirc B) =_{df} \Diamond(A \wedge B)$, $(A \ominus B) =_{df} \neg(A \bigcirc B)$ (eller $\neg\Diamond(A \wedge B)$ eller ⟠$(A \wedge B)$), $(A \Rightarrow B) =_{df} \Box(A \supset B)$, $(A \Leftrightarrow B) =_{df} ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ (eller $(\Box(A \supset B) \wedge \Box(B \supset A))$ eller $\Box(A \equiv B)$), $KA =_{df} (PA \wedge P\neg A)$, $NA =_{df} \neg KA$ (eller $OA \vee O\neg A$).

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). De satslogiska konnektiven är välkända från satslogiken. Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår. Övriga satser i språket läses på följande sätt:

$\Box B$: Det är nödvändigt att B.
$\Diamond B$: Det är möjligt att B.
⟠B: Det är omöjligt att B.
OB: Det bör vara fallet (är obligatoriskt) att B.
PB: Det är tillåtet (får vara fallet) att B.

FB: Det är förbjudet (fel) att B.
⊟B: Det är inte nödvändigt (onödvändigt) att B.
KA: Det är frivilligt att A.
NA: Det är inte frivilligt att A.
A○B: A är konsistent (förenlig) med B.
A⊖B: A är inkonsistent (oförenlig) med B.
A⇒B: A implicerar strikt (medför) B.
A⇔B: A är strikt ekvivalent med B.

Notera att □, ◇, ⟠, ⊟, O, P, F, K och N är monadiska satsoperatorer som tar en sats som argument och ger en sats som värde, medan ○, ⊖, ⇒, och ⇔ är dyadiska satsoperatorer som tar två satser som argument och ger en sats som värde. Vi kan tolka detta som att de monadiska operatorerna tillskriver olika propositioner (sakförhållanden) olika modala eller deontiska egenskaper, medan de dyadiska operatorerna uttrycker modala relationer mellan propositioner (sakförhållanden). Vi kommer senare att se att A○B är logiskt ekvivalent med B○A, att A⊖B är logiskt ekvivalent med B⊖A, och att A ⇔B är logiskt ekvivalent med B⇔A. ”A○B” kan därför också läsas ”A och B är konsistenta (förenliga) (med varandra)”, ”A ⊖ B” ”A och B är inkonsistenta (oförenliga) (med varandra)”, och ”A⇔B” ”A och B är strikt ekvivalenta (med varandra)”.

3. Semantik

Jag använder samma semantik i den här uppsatsen som i Rönnedal (2015b). Alla grundläggande begrepp definieras på samma sätt: ramar, modeller, giltighet, satisfierbarhet, logisk följd m.m. Sanningsvillkoren för de grundläggande satserna är desamma. Låt ”$\Vdash_{M, w}$ B” stå för att B är sann i den möjliga världen w i modellen M. ”omm” är en förkortning av ”om och endast om”. Då kan vi härleda följande sanningsvillkor för de nya definierade satserna som innehåller dyadiska operatorer:

$\Vdash_{M, w}$ A○B omm för minst en möjlig värld w’ ∈ W sådan att Rww’: $\Vdash_{M, w'}$ A och $\Vdash_{M, w'}$ B.
$\Vdash_{M, w}$ A⊖B omm för alla möjliga världar w’ ∈ W sådana att Rww’: $\Vdash_{M, w'}$ ¬A eller $\Vdash_{M, w'}$ ¬B.
$\Vdash_{M, w}$ A⇒B omm för alla möjliga världar w’ ∈ W sådana att Rww’: inte $\Vdash_{M, w'}$ A eller $\Vdash_{M, w'}$ B.
$\Vdash_{M, w}$ A⇔B omm för alla möjliga världar w’ ∈ W sådana att Rww’: $\Vdash_{M, w'}$ A omm $\Vdash_{M, w'}$ B.

3.1. Villkor på ramar och klasser av ramar och deras logik

Jag använder exakt samma villkor på ramar som i Rönnedal (2015b), och dessa ramar kan klassificeras på samma sätt som i tidigare arbeten. Genom att införa olika villkor på våra ramar kan vi även, som vanligt, definiera en mängd logiska system. Se Rönnedal (2015b) för mer information om detta.

4. Bevisteori

Jag använder samma bimodala aletisk-deontiska tablåsystem i den här uppsatsen som i Rönnedal (2015b). För att underlätta bevisen av vissa härledda regler och för att förenkla olika tablåbevis skall vi emellertid även inkludera den s.k. CUT regeln i alla våra system. För mer information om denna regel, se t.ex. Rönnedal (2009), (2012b). CUT regeln är redundant i alla system som beskrivs i Rönnedal (2015b) i den meningen att vi inte kan bevisa några nya teorem i dessa system med hjälp av denna regel.

Grundläggande begrepp, såsom träd, semantisk tablå, gren, öppen och sluten gren, teorem, bevis, härledning osv. definieras på vanligt sätt, se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 131, eller Priest (2008).[2]

4.1. Tablåregler

Jag använder exakt samma satslogiska, och grundläggande modala och deontiska regler, samt samma modala och deontiska tillgänglighetsregler i den här uppsatsen som i Rönnedal (2015b). I det här avsnittet skall jag emellertid introducera en mängd härledda regler som kan användas för att förenkla olika bevis och härledningar i våra system. Bevisen för att alla dessa regler faktiskt är härledbara i våra system lämnas till läsaren. Alla satser som kan bevisas med hjälp av dessa regler, kan också bevisas utan dem. De är likväl värdefulla eftersom de kan användas för att förenkla olika bevis och härledningar i våra olika system. De flesta regler vi tar upp är härledbara i alla aletisk-deontiska tablåsystem. Men några är endast härledbara om systemet innehåller vissa tillgänglighetsregler. Reglerna i Tabell 7 är t.ex. endast härledbara om systemet innehåller regeln T-MO (se Rönnedal (2015b)).

[2] För mer information om den s.k. tablåmetoden, se t.ex. Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463, Gentzen (1935) och Gentzen (1935b), D'Agostino et al. (1999), Fitting & Mendelsohn (1998), Garson (2006), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), (2012b) och Smullyan (1968).

4.1.1. Nya tablåregler

$(\bigcirc)$	$(\ominus)$	$(\neg\bigcirc')$	$(\bigcirc\Diamond)$
$A \bigcirc B$, i	$A \ominus B$, i	$\neg(A \bigcirc B)$, i	$A \bigcirc B$, i
$\downarrow$	irj	irj	$\downarrow$
irj	$\swarrow\searrow$	$\swarrow\searrow$	$\Diamond(A \wedge B)$, i
A, j	$\neg$A, j $\neg$B, j	$\neg$A, j $\neg$B, j	
B, j			

$(\neg\bigcirc)$	$(\neg\ominus)$	$(\neg\ominus')$	$(\neg\bigcirc\Diamond)$
$\neg(A \bigcirc B)$, i	$\neg(A \ominus B)$, i	$\neg(A \ominus B)$, i	$\neg(A \bigcirc B)$, i
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$A \ominus B$, i	$A \bigcirc B$, i	irj	$\neg\Diamond(A \wedge B)$, i
		A, j	
		B, j	

Tabell 1

$(\bigcirc\wedge)$	$(\ominus\Diamond)$	$(\neg\bigcirc\Box)$	$(\ominus\wedge)$
$A \bigcirc B$, i	$A \ominus B$, i	$\neg(A \bigcirc B)$, i	$A \ominus B$, i
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	irj
irj	$\neg\Diamond(A \wedge B)$, i	$\Box\neg(A \wedge B)$, i	$\downarrow$
$A \wedge B$, j			$\neg(A \wedge B)$, j

$(\neg\bigcirc\wedge)$	$(\neg\ominus\Diamond)$	$(\neg\ominus\Box)$	$(\neg\ominus\wedge)$
$\neg(A \bigcirc B)$, i	$\neg(A \ominus B)$, i	$A \ominus B$, i	$\neg(A \ominus B)$, i
irj	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\Diamond(A \wedge B)$, i	$\Box\neg(A \wedge B)$, i	irj
$\neg(A \wedge B)$, j			$A \wedge B$, j

Tabell 2

$(\Rightarrow)$	$(\Rightarrow\Box)$	$(\Rightarrow')$	$(\Rightarrow\Diamond\!\!\!\!-)$
$A \Rightarrow B$, i	$A \Rightarrow B$, i	$A \Rightarrow B$, i	$A \Rightarrow B$, i
irj	$\downarrow$	irj	$\downarrow$
$\swarrow\searrow$	$\Box(A \supset B)$, i	$\downarrow$	$\Diamond\!\!\!\!-(A \wedge \neg B)$, i
$\neg$A, j B, j		$A \supset B$, j	

$(\neg\Rightarrow)$	$(\neg\Rightarrow\Box)$	$(\neg\Rightarrow')$	$(\neg\Rightarrow\Diamond)$
$\neg(A\Rightarrow B), i$ $\downarrow$ irj A, j $\neg B, j$	$\neg(A\Rightarrow B), i$ $\downarrow$ $\neg\Box(A\supset B), i$	$\neg(A\Rightarrow B), i$ $\downarrow$ irj $\neg(A\supset B), j$	$\neg(A\Rightarrow B), i$ $\downarrow$ $\Diamond\neg(A\supset B), i$

Tabell 3

$(\Leftrightarrow)$	$(\Leftrightarrow\Box)$	$(\Leftrightarrow')$
$A\Leftrightarrow B, i$ $\downarrow$ $A\Rightarrow B, i$ $B\Rightarrow A, i$	$A\Leftrightarrow B, i$ $\downarrow$ $\Box(A\equiv B), i$	$A\Leftrightarrow B, i$ irj $\swarrow\searrow$ $A, j \quad \neg A, j$ $B, j \quad \neg B, j$
$(\neg\Leftrightarrow)$	$(\neg\Leftrightarrow\Box)$	$(\neg\Leftrightarrow')$
$\neg(A\Leftrightarrow B), i$ $\swarrow\searrow$ $\neg(A\Rightarrow B), i \quad \neg(B\Rightarrow A), i$	$\neg(A\Leftrightarrow B), i$ $\downarrow$ $\neg\Box(A\equiv B), i$	$\neg(A\Leftrightarrow B), i$ $\downarrow$ irj $\swarrow\searrow$ $A, j \quad \neg A, j$ $\neg B, j \quad B, j$

Tabell 4

$(\Leftrightarrow\Box')$	$(\Leftrightarrow\equiv)$	$(\Leftrightarrow\supset)$
$A\Leftrightarrow B, i$ $\downarrow$ $\Box(A\supset B), i$ $\Box(B\supset A), i$	$A\Leftrightarrow B, i$ irj $\downarrow$ $A\equiv B, j$	$A\Leftrightarrow B, i$ irj $\downarrow$ $A\supset B, j$ $B\supset A, j$
$(\neg\Leftrightarrow\Box')$	$(\neg\Leftrightarrow\equiv)$	$(\neg\Leftrightarrow\supset)$
$\neg(A\Leftrightarrow B), i$ $\swarrow\searrow$ $\neg\Box(A\supset B), i \quad \neg\Box(B\supset A), i$	$\neg(A\Leftrightarrow B), i$ $\downarrow$ irj $\neg(A\equiv B), j$	$\neg(A\Leftrightarrow B), i$ $\downarrow$ irj $\swarrow\searrow$ $\neg(A\supset B), j \quad \neg(B\supset A), j$

Tabell 5

(□⇔)	(◇⇔)	(⟠⇔)	(⊟⇔)
A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i
□A, i	◇A, i	⟠A, i	⊟A, i
↓	↓	↓	↓
□B, i	◇B, i	⟠B, i	⊟B, i

(⇔□)	(⇔◇)	(⇔⟠)	(⇔⊟)
A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i
□B, i	◇B, i	⟠B, i	⊟B, i
↓	↓	↓	↓
□A, i	◇A, i	⟠A, i	⊟A, i

Tabell 6

(O⇔)	(P⇔)	(F⇔)	(¬O⇔)
A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i
OA, i	PA, i	FA, i	¬OA, i
↓	↓	↓	↓
OB, i	PB, i	FB, i	¬OB, i

(⇔O)	(⇔P)	(⇔F)	(⇔¬O)
A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i	A⇔B, i
OB, i	PB, i	FB, i	¬OB, i
↓	↓	↓	↓
OA, i	PA, i	FA, i	¬OA, i

Tabell 7

4.2. Tablåsystem

Ett tablåsystem är en mängd tablåregler. Detta begrepp definieras i den här uppsatsen på samma sätt som i Rönnedal (2015b). Alla regler i Tabell 1–6 ovan är härledbara i alla s.k. aletisk-deontiska system, givet att vi adderar definitionerna i Avsnitt 2.3 (och CUT regeln). Reglerna i Tabell 7 är härledbara i alla system som innehåller tablåregeln T-MO (Rönnedal (2015b)). Vi skall nu se närmare på hur dessa regler kan användas för att bevisa en mängd intressanta teorem.

4.3. Exempel på teorem

Det här avsnittet innehåller några teorem i olika aletisk-deontiska tablåsystem. Bevisen är ofta relativt enkla och i de flesta fall utelämnade. Jag skall emellertid gå igenom några exempel för att belysa metoden. Vårt första (meta)teorem handlar om de formella egenskaperna hos de modala relationerna konsistens, inkonsistens, strikt implikation och strikt ekvivalens.

(Meta)Teorem 1. **(i)** $\bigcirc$ är varken reflexiv eller irreflexiv. Dvs. det är inte fallet att $A \bigcirc A$ för alla A, och det är inte fallet att $\neg(A \bigcirc A)$ för alla A; varken $A \bigcirc A$ eller $\neg(A \bigcirc A)$ är teorem. Med andra ord, det är inte fallet att varje påstående är konsistent med sig självt, och det är inte fallet att varje påstående är inkonsistent med sig självt. **(ii)** $\bigcirc$ är symmetrisk, dvs. $(A \bigcirc B) \supset (B \bigcirc A)$ gäller för alla A och B, $(A \bigcirc B) \supset (B \bigcirc A)$ är ett teorem. Om A är konsistent med B, så är B konsistent med A. Från detta följer det att $(A \bigcirc B) \equiv (B \bigcirc A)$ är ett teorem. **(iii)** $\bigcirc$ är varken transitiv eller intransitiv. Det är inte fallet att $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset (A \bigcirc C)$ för alla A, B och C; $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset (A \bigcirc C)$ är inte ett teorem; och det är inte fallet att $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset \neg(A \bigcirc C)$ för alla A, B och C; $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset \neg(A \bigcirc C)$ är inte ett teorem. Med andra ord, det är inte sant att om A är förenlig med B och B är förenlig med C, så är A förenlig med C, för alla A, B och C; och det är inte sant att om A är förenlig med B och B är förenlig med C, så är det inte fallet att A är förenlig med C, för alla A, B och C. **(iv)** $\ominus$ är varken reflexiv eller irreflexiv. Dvs. det är inte fallet att $A \ominus A$ för alla A, och det är inte fallet att $\neg(A \ominus A)$ för alla A. Varken $A \ominus A$ eller $\neg(A \ominus A)$ är teorem. **(v)** $\ominus$ är symmetrisk, dvs. $(A \ominus B) \supset (B \ominus A)$ gäller för alla A och B, $(A \ominus B) \supset (B \ominus A)$ är ett teorem. Om A är inkonsistent med B, så är B inkonsistent med A. Från detta följer det att $(A \ominus B) \equiv (B \ominus A)$ är ett teorem. **(vi)** $\ominus$ är varken transitiv eller intransitiv. Det är inte fallet att $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset (A \ominus C)$ för alla A, B och C; $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset (A \ominus C)$ är inte ett teorem; och det är inte fallet att $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset \neg(A \ominus C)$ för alla A, B och C; $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset \neg(A \ominus C)$ är inte ett teorem. **(vii)** $\Rightarrow$ är reflexiv, och transitiv. Dvs. $A \Rightarrow A$, gäller för alla A, $A \Rightarrow A$ är ett teorem; och $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (A \Rightarrow C)$ gäller för alla A, B och C, $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (A \Rightarrow C)$ är ett teorem. Varje sats implicerar strikt (medför) sig själv, och om A strikt implicerar (medför) B och B strikt implicerar (medför) C, så gäller det att A strikt implicerar (medför) C. **(viii)** $\Rightarrow$ är varken symmetrisk eller asymmetrisk. Dvs. det är inte fallet att $(A \Rightarrow B) \supset (B \Rightarrow A)$ för alla A och B, $(A \Rightarrow B) \supset (B \Rightarrow A)$ är inte ett teorem; och det är inte fallet att $(A \Rightarrow B) \supset \neg(B \Rightarrow A)$ för alla A och B, $(A \Rightarrow B) \supset \neg(B \Rightarrow A)$ är inte ett teorem. Med andra ord, det är inte sant att om A strikt implicerar B, så gäller det att B strikt implicerar A, för alla A och B; och det är inte sant att om A strikt implicerar B, så gäller det att B inte strikt implicerar A, för alla A och B. **(ix)** $\Leftrightarrow$ är en ekvivalensrelation, dvs. $\Leftrightarrow$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Följande satser är teorem $(A \Leftrightarrow A)$, $(A \Leftrightarrow B) \supset (B \Leftrightarrow A)$, och $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \supset (A \Leftrightarrow C)$, där A, B, och C kan bytas ut mot vilka satser som helst. Från detta följer det att $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$. Varje sats är strikt ekvivalent med sig själv; om A är strikt ekvivalent med B, så är B strikt ekvivalent med A; och om A är strikt ekvivalent med B och B är strikt ekvivalent med C, så är A strikt ekvivalent med C. (**(i)**–**(ix)** gäller t.ex. i alla system som beskrivs i Rönnedal (2015b).)

Bevis. Lämnas till läsaren.

Vårt nästa (meta)teorem visar att ”alla” modala begrepp (i den här uppsatsen) i princip är interdefinierbara, definierbara i termer av varandra.

(Meta)Teorem 2. Alla de modala operatorerna $\Box$, $\Diamond$, $⟠$, $\boxminus$, $\bigcirc$, $\ominus$, och $\Rightarrow$ är interdefinierbara. Detta innebär att det i princip är möjligt att konstruera ett språk som innehåller endast en av dessa operatorer som primitivt begrepp, och att alla andra modala operatorer definieras i termer av denna primitiva operator. Mer exakt, detta teorem innebär att **(i)** alla satser i Tabell 8 och 9, samt i fotnot 3, kan bevisas i alla våra aletisk-deontiska system. **(ii)** Låt T vara en sats i Tabell 8 eller 9 och låt T’ vara exakt likadan som T förutom att $\equiv$ har bytts ut mot $\Leftrightarrow$. Då är T’ ett teorem i alla våra aletisk-deontiska system.

Bevis. Några av satserna i Tabell 8 och några av satserna i Tabell 9 är sanna per definition i det språk som vi använder i den här uppsatsen, t.ex. $(A \ominus B) \equiv \neg(A \bigcirc B)$. Andra satser behöver bevisas. Det kan vi göra genom att först översätta satserna till primitiv notation och sedan skapa slutna tablåer för deras negationer. Men vi kan också bevisa dessa satser med hjälp av de härledda reglerna i Avsnitt 4.1.1.

Konsistens	Inkonsistens	Strikt implikation
$\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$	$\Diamond A \equiv \neg(A \ominus A)$	$\Diamond A \equiv \neg(A \Rightarrow \neg A)$
$⟠A \equiv \neg(A \bigcirc A)$	$⟠A \equiv (A \ominus A)$	$⟠A \equiv (A \Rightarrow \neg A)$
$\Box A \equiv \neg(\neg A \bigcirc \neg A)$	$\Box A \equiv (\neg A \ominus \neg A)$	$\Box A \equiv (\neg A \Rightarrow A)$
$\boxminus A \equiv (\neg A \bigcirc \neg A)$	$\boxminus A \equiv \neg(\neg A \ominus \neg A)$	$\boxminus A \equiv \neg(\neg A \Rightarrow A)$
$(A \ominus B) \equiv \neg(A \bigcirc B)$	$(A \bigcirc B) \equiv \neg(A \ominus B)$	$(A \bigcirc B) \equiv \neg(A \Rightarrow \neg B)$
$(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \bigcirc \neg B)$	$(A \Rightarrow B) \equiv (A \ominus \neg B)$	$(A \ominus B) \equiv (A \Rightarrow \neg B)$
$(A \Leftrightarrow B) \equiv (\neg(A \bigcirc \neg B)$ $\wedge \neg(B \bigcirc \neg A))$	$(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \ominus \neg B)$ $\wedge (B \ominus \neg A))$	$(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow B)$ $\wedge (B \Rightarrow A))$

Tabell 8

Låt mig gå igenom ett exempel. $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ är per definition ekvivalent med $\Diamond A \equiv \Diamond(A \wedge A)$. Så, för att bevisa $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ räcker det med att vi skapar en sluten tablå för $\neg(\Diamond A \equiv \Diamond(A \wedge A))$. Jag skall emellertid bevisa $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ med hjälp av några härledda regler.

(1) $\neg(\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)), 0$

$\swarrow \qquad \searrow$

(2) $\Diamond A, 0$ [1, $\neg\leftrightarrow$]	(3) $\neg\Diamond A, 0$ [1, $\neg\leftrightarrow$]
(4) $\neg(A \bigcirc A), 0$ [1, $\neg\leftrightarrow$]	(5) $A \bigcirc A, 0$ [1, $\neg\leftrightarrow$]
(6) $A \ominus A, 0$ [4, $\neg\bigcirc$]	(7) $\Box\neg A, 0$ [3, $\neg\Diamond$]
(8) 0r1 [2, $\Diamond$]	(9) 0r1 [5, $\bigcirc$]
(10) A, 1 [2, $\Diamond$]	(11) A, 1 [5, $\bigcirc$]
$\swarrow \qquad \searrow$	(12) A, 1 [5, $\bigcirc$]
(13) $\neg A$, 1 [6, 8, $\ominus$] (14) $\neg A$, 1 [6, 8, $\ominus$]	(15) $\neg A$, 1 [7, 9, $\Box$]
(16) * [10, 13] (17) * [10, 14]	(18) * [12, 15]

Alla grenar i detta träd är slutna. Alltså är den ovanstående tablån ett bevis för $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$. Intuitivt innebär detta att antagandet att $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ är falsk leder till en motsägelse, varför $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ måste vara sann. Övriga satser bevisas på liknande sätt.

Nödvändighet	Möjlighet	Omöjlighet
$\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$	$\diamondminus A \equiv \neg\Diamond A$	$\Diamond A \equiv \neg\diamondminus A$
$\diamondminus A \equiv \Box\neg A$	$\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$	$\Box A \equiv \diamondminus\neg A$
$\boxminus A \equiv \neg\Box A$	$\boxminus A \equiv \Diamond\neg A$	$\boxminus A \equiv \neg\diamondminus\neg A$
$(A \bigcirc B) \equiv \neg\Box\neg(A \wedge B)$	$(A \bigcirc B) \equiv \Diamond(A \wedge B)$	$(A \bigcirc B) \equiv \neg\diamondminus(A \wedge B)$
$(A \ominus B) \equiv \Box\neg(A \wedge B)$	$(A \ominus B) \equiv \neg\Diamond(A \wedge B)$	$(A \ominus B) \equiv \diamondminus(A \wedge B)$
$(A \Rightarrow B) \equiv \Box(A \supset B)$	$(A \Rightarrow B) \equiv \neg\Diamond\neg(A \supset B)$	$(A \Rightarrow B) \equiv \diamondminus\neg(A \supset B)$
$(A \Leftrightarrow B) \equiv \Box(A \equiv B)$	$(A \Leftrightarrow B) \equiv \neg\Diamond\neg(A \equiv B)$	$(A \Leftrightarrow B) \equiv \diamondminus\neg(A \equiv B)$

Tabell 9[3]

Dessa resultat förtjänar några kommentarer. Kolumn 1 i Tabell 8 visar hur uttrycken ”det är möjligt att”, ”det är omöjlig att”, ”det är nödvändig att”, och ”det är inte nödvändigt att” kan definieras i termer av konsistens. Kolumn 2 i Tabell 8 visar hur dessa uttryck kan definieras i termer av inkonsistens, och kolumn 3 visar hur de kan definieras i termer av strikt implikation. Vidare

[3] Motsvarande ”definitioner” i termer av $\boxminus$ ser ut på följande sätt: $\Box A \equiv \neg\boxminus A$; $\Diamond A \equiv \boxminus\neg A$; $\diamondminus A \equiv \neg\boxminus\neg A$; $(A \bigcirc B) \equiv \boxminus\neg(A \wedge B)$; $(A \ominus B) \equiv \neg\boxminus\neg(A \wedge B)$; $(A \Rightarrow B) \equiv \neg\boxminus(A \supset B)$; $(A \Leftrightarrow B) \equiv \neg\boxminus(A \equiv B)$.

kan vi se hur ”inkonsistens”, ”strikt implikation” och ”strikt ekvivalens” kan definieras i termer av ”konsistens” (kolumn 1 i Tabell 8). Vi kan se hur ”konsistens”, ”strikt implikation” och ”strikt ekvivalens” kan definieras i termer av ”inkonsistens” (kolumn 2 i Tabell 8) osv. Om $A \bigcirc A$, så skall vi säga att A är ”självkonsistent”, och om $A \ominus A$ att A är ”självinkonsistent”. Om $A \Rightarrow \neg A$, skall vi säga att A är ”självmotsägande”. Satserna i tabellerna visar på några intressanta samband mellan våra grundläggande modala begrepp. Följande ekvivalenser gäller t.ex. i alla system:

(i) A är motsägelsefri (A säger inte emot sig själv) omm det inte är fallet att A implicerar (medför) sin egen negation (dvs. det är inte fallet att A medför inte-A) omm A är självkonsistent (dvs. A är konsistent med sig själv) omm A är konsistent med A omm A är möjlig (dvs. det är möjligt att A). Påståendet att A är möjlig kan alltså uttryckas på flera ekvivalenta sätt, t.ex. ”Det är möjligt att A”, ”A är möjlig”, ”A är självkonsistent”, ”A är motsägelsefri”, ”A säger inte emot sig själv”, ”A implicerar inte sin egen negation”, ”Det är inte fallet att A medför inte-A”.

(ii) A är självmotsägande (dvs. A säger emot sig själv) omm A implicerar (medför) sin egen negation (dvs. A medför inte-A) omm A är självinkonsistent (dvs. A är inkonsistent med sig själv) omm A är inkonsistent med A omm A är omöjlig (dvs. det är omöjligt att A). Tanken att A är omöjlig kan således uttryckas på flera ekvivalenta sätt, t.ex. ”Det är omöjligt att A”, ”A är omöjlig”, ”A är självinkonsistent”, ”A är motsägelsefull”, ”A säger emot sig själv”, ”A implicerar sin egen negation”, ”A medför inte-A”.

(iii) Det är nödvändigt att A omm inte-A är självinkonsistent (dvs. inte-A är inkonsistent med sig själv) omm inte-A är inkonsistent med inte-A omm negationen av A är självmotsägande (dvs. inte-A säger emot sig själv) omm negationen av A implicerar (medför) A (dvs. inte-A medför A). Propositionen att A är nödvändig kan alltså uttryckas på flera olika ekvivalenta sätt, t.ex. ”Det är nödvändigt att A”, ”A är nödvändig”, ”A måste vara fallet”, ”inte-A är självmotsägande”, ”inte-A säger emot sig själv”, ”inte-A implicerar sin egen negation”, ”inte-A implicerar A”. Osv.

C I Lewis teorem

I Kapitel VI i Lewis & Langford (1932) bevisar Lewis en mängd intressanta teorem som innehåller symboler som representerar konsistens, möjlighet och strikt implikation. Lewis använder en axiomatisk metod. Han utgår ifrån en mängd postulat och slutledningsregler och bevisar med hjälp av dessa sina satser. I Appendix II i samma bok beskriver han en mängd modallogiska system. Hans framställning av dessa modallogiska system är i många avseenden banbrytande. I (Meta)Teorem 3 nedan demonstrerar vi att alla de postulat och teorem som kan uttryckas i vårt språk L och som Lewis bevisar i Kapitel VI i Lewis & Langford (1932) också kan bevisas i våra tablåsystem. De flesta teorem kan bevisas i alla system, men vissa deduktioner kräver tillgång till tablåregeln T-aT (se Rönnedal (2015b)).

I min framställning av Lewis teorem kommer jag att använda följande förkortningar. Jag använder en punkt ”.” för konjunktion, stället för ”$\wedge$”. Konjunktioner av formen $(A.(B.C))$ eller $((A.B).C)$ förkortas $(A.B.C)$ osv. ”Disjunktioner” förkortas på samma sätt. $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D$… osv. är en sammanfattning av följande teorem: $A \Leftrightarrow B$ och $B \Leftrightarrow C$ och $C \Leftrightarrow D$… osv. Från detta följer det också att $A \Leftrightarrow C$, $A \Leftrightarrow D$, $B \Leftrightarrow A$, $B \Leftrightarrow D$, $C \Leftrightarrow A$, $C \Leftrightarrow B$… osv. Framställningen av teoremen liknar därmed Lewis, även om jag använder en något annan notation.

(Meta)Teorem 3. Låt T vara ett axiom (postulat) eller ett teorem i Kapitel VI i Lewis och Langford (1932) som kan uttryckas i vårt språk L. Låt S vara något av våra tablåsystem som innehåller tablåregeln T-aT. Då är T ett teorem i S. Notera dock att många, men inte alla, av Lewis satser kan bevisas utan T-aT.

Bevis. Teoremet kan bevisas genom att för varje sats A i Tabellerna 10–14 skapa en sluten tablå för $\neg A$. Bevisen lämnas till läsaren.

$(p\vee q)\Leftrightarrow\neg(\neg p.\neg q)$; $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\neg\Diamond(p.\neg q)$; $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow((p\Rightarrow q).(q\Rightarrow p))$;
$(p.q)\Rightarrow(q.p)$; $(p.q)\Rightarrow p$; $p\Rightarrow(p.p)$; $((p.q).r)\Rightarrow(p.(q.r))$; $p\Rightarrow\neg\neg p$;
$((p\Rightarrow q).(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$; $(p.(p\Rightarrow q))\Rightarrow q$; $p\Rightarrow p$; $p\Leftrightarrow p$; $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow(q\Leftrightarrow p)$;
$((p\Leftrightarrow q).(q\Leftrightarrow r))\Rightarrow(p\Leftrightarrow r)$; $(p.q)\Leftrightarrow(q.p)$; $(p.q)\Rightarrow q$; $(\neg p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow p)$;
$\neg\neg p\Rightarrow p$; $p\Leftrightarrow\neg\neg p$; $(\neg p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow p)$; $(\neg p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow(q\Rightarrow p)$;
$(p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow(q\Rightarrow\neg p)$; $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$; $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$;
$(p\Rightarrow\neg q)\Leftrightarrow(q\Rightarrow\neg p)$; $((p.q).r)\Leftrightarrow(p.(q.r))\Leftrightarrow(q.(p.r))\Leftrightarrow((q.p).r)$ etc. etc.;
$((p.q)\Rightarrow r)\Leftrightarrow((q.\neg r)\Rightarrow\neg p)\Leftrightarrow((p.\neg r)\Rightarrow\neg q)$; $((p.q)\Rightarrow r)\Rightarrow((p.\neg r)\Rightarrow\neg q)$;
$((p.q)\Rightarrow r)\Rightarrow((q.\neg r)\Rightarrow\neg p)$; $p\Leftrightarrow(p.p)$; $\neg p\Rightarrow\neg(p.q)$; $\neg q\Rightarrow\neg(p.q)$;
$((q\Rightarrow r).(p\Rightarrow q))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$; $((p\Rightarrow q).((q.r)\Rightarrow s))\Rightarrow((p.r)\Rightarrow s)$;
$((p\Rightarrow q).(q\Rightarrow r).(r\Rightarrow s))\Rightarrow(p\Rightarrow s)$; $(p.\neg q)\Rightarrow\neg(p\Rightarrow q)$; $(p\Rightarrow q)\Rightarrow\neg(p.\neg q)$;
$(p.q)\Rightarrow\neg(p\Rightarrow\neg q)$; $(p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow\neg(p.q)$; $p\Rightarrow\neg(p\Rightarrow\neg p)$; $(p\Rightarrow\neg p)\Rightarrow\neg p$;
$(\neg p\Rightarrow p)\Rightarrow p$; $\neg p\Rightarrow\neg(\neg p\Rightarrow p)$; $\neg(p.\neg p)$; $(p\vee q)\Rightarrow(q\vee p)$; $(p\vee q)\Leftrightarrow(q\vee p)$;
$p\Rightarrow(p\vee q)$; $q\Rightarrow(p\vee q)$; $(p\vee p)\Rightarrow p$; $p\Leftrightarrow(p\vee p)$; $(p\vee(q\vee r))\Rightarrow((p\vee q)\vee r)$;
$(p\vee(q\vee r))\Leftrightarrow((p\vee q)\vee r)\Leftrightarrow(q\vee(p\vee r))\Leftrightarrow((q\vee p)\vee r)$ etc. etc.; $p\vee\neg p$

Tabell 10. Grundläggande axiom (postulat) och teorem

$(p \supset q) \Leftrightarrow \neg(p . \neg q)$; $(p \equiv q) \Leftrightarrow ((p \supset q) . (q \supset p))$; $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \supset q)$;
$\neg(p \supset q) \Leftrightarrow (p . \neg q)$; $(p \supset q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q)$; $(p . q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \lor \neg q)$; $(p \lor p) \supset p$;
$q \supset (p \lor q)$; $(p \lor q) \supset (q \lor p)$; $(p \lor (q \lor r)) \Rightarrow (q \lor (p \lor r))$; $(p \lor (q \lor r)) \supset (q \lor (p \lor r))$;
$((p . q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \supset r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \supset r))$; $(q \supset r) \Rightarrow ((p \lor q) \supset (p \lor r))$;
$(q \supset r) \supset ((p \lor q) \supset (p \lor r))$; $(p . (p \supset q)) \Rightarrow q$; $((p \supset q) . (q \supset r)) \Rightarrow (p \supset r)$;
$((p \supset q) . (q \supset r)) \supset (p \supset r)$; $((q \supset r) . (p \supset q)) \Rightarrow (p \supset r)$; $((q \supset r) . (p \supset q)) \supset (p \supset r)$;
$(p . (p \supset q)) \supset q$; $(p \supset q) \Leftrightarrow (\neg q \supset \neg p)$; $(p \supset q) \Rightarrow (\neg q \supset \neg p)$; $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$;
$p \Rightarrow (q \supset p)$; $p \supset (q \supset p)$; $\neg p \Rightarrow (p \supset q)$; $\neg p \supset (p \supset q)$; $p \Leftrightarrow (\neg p \supset p)$;
$\neg p \Leftrightarrow (p \supset \neg p)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (p \supset \neg q)$; $\neg(p \supset q) \supset (p \supset \neg q)$; $\neg(p \supset \neg q) \Rightarrow (p \supset q)$;
$\neg(p \supset \neg q) \supset (p \supset q)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (q \supset p)$; $\neg(p \supset q) \supset (q \supset p)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (\neg p \supset q)$;
$\neg(p \supset q) \supset (\neg p \supset q)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (q \supset \neg p)$; $\neg(p \supset q) \supset (q \supset \neg p)$;
$\neg(p \supset q) \Rightarrow (\neg p \supset \neg q)$; $\neg(p \supset q) \supset (\neg p \supset \neg q)$; $(p \supset q) \lor (p \supset \neg q)$;
$((p . q) \supset r) \Leftrightarrow (p \supset (q \supset r)) \Leftrightarrow (q \supset (p \supset r))$; $((p . q) \supset r) \Rightarrow (p \supset (q \supset r))$;
$(p \supset (q \supset r)) \Rightarrow ((p . q) \supset r)$; $((p . q) \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))$; $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p . q) \supset r)$;
$(p \supset q) \Rightarrow ((q \supset r) \supset (p \supset r))$; $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$;
$(q \supset r) \Rightarrow ((p \supset q) \supset (p \supset r))$; $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$;
$((p . q) \supset r) \Leftrightarrow ((p . \neg r) \supset \neg q) \Leftrightarrow ((q . \neg r) \supset \neg p)$; $((p \supset q) . ((q . r) \supset s)) \Rightarrow ((p . r) \supset s)$;
$((p \supset q) . (q . r) \supset s) \supset ((p . r) \supset s)$

Tabell 11. Teorem som innehåller materiell implikation

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p . r) \Rightarrow (q . r))$; $(p \supset q) \Rightarrow ((p . r) \supset (q . r))$; $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \lor r) \Rightarrow (q \lor r))$;
$(p \supset q) \Rightarrow ((p \lor r) \supset (q \lor r))$; $((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q . r))$; $(p . (p \supset q)) \Rightarrow (p . q)$;
$(p . (p \supset q)) \Leftrightarrow (p . q)$; $(p . q) \Leftrightarrow (p . \neg(p . \neg q))$; $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (p . q))$;
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \lor q) \Rightarrow q)$; $p \Leftrightarrow ((p \lor q) . p)$; $((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \lor q) \Rightarrow r)$;
$(p \Rightarrow (q . r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow r))$; $((p \lor q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow r))$;
$((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p . q) \Rightarrow (r . s))$; $((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \lor q) \Rightarrow (r \lor s))$;
$((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (q \lor r)))$; $((p . q) \lor (p . r)) \Rightarrow (p . (q \lor r))$;
$(p . (q \lor r)) \Rightarrow ((p . q) \lor (p . r))$; $(p . (q \lor r)) \Leftrightarrow ((p . q) \lor (p . r))$;
$(p \lor (q . r)) \Leftrightarrow ((p \lor q) . (p \lor r))$; $(p \supset (q . r)) \Leftrightarrow ((p \supset q) . (p \supset r))$;
$((p \supset r) . (q \supset r)) \Rightarrow ((p \lor q) \supset r)$; $((p \lor q) \supset r) \Rightarrow ((p \supset r) . (q \supset r))$;
$((p \supset q) \lor (p \supset r)) \Rightarrow (p \supset (q \lor r))$; $((p \supset r) \lor (q \supset r)) \Rightarrow ((p . q) \supset r)$;
$((p \supset r) . (q \supset s)) \Rightarrow ((p . q) \Rightarrow (r . s))$; $((p \supset r) . (q \supset s)) \Rightarrow ((p \lor q) \supset (r \lor s))$

Tabell 12. Fler teorem som innehåller strikt implikation

Tabell 10 innehåller ett antal axiom (postulat) och grundläggande teorem som Lewis bevisar med hjälp av dessa. I våra system är alla satser i Tabell 10 teorem, inklusive Lewis axiom. Tabell 11 rymmer en mängd teorem som innehåller materiell implikation. Lewis tar bl.a. upp dessa för att belysa likheter och skillnader mellan materiell och strikt implikation.

I Tabell 13 nämns ett antal teorem som innehåller symboler som representerar konsistens och möjlighet, nämligen $\bigcirc$ respektive $\Diamond$. Lewis introducerar inga särskilda symboler för ”nödvändighet” och ”omöjlighet”, men påpekar att ”$\neg\Diamond\neg A$” kan läsas ”A är nödvändig” (”Det är nödvändigt att A”) och ”$\neg\Diamond A$” ”A är omöjlig” (”Det är omöjligt att A”).

$(p \bigcirc q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$; $(p \bigcirc q) \Leftrightarrow (\neg(p \Rightarrow \neg q) . \neg(q \Rightarrow \neg p))$; $(p . q) \Rightarrow (p \bigcirc q)$;

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \bigcirc \neg q)$; $\neg(p \bigcirc \neg p)$; $(p \bigcirc q) \Rightarrow (q \bigcirc p)$; $(p \bigcirc q) \Leftrightarrow (q \bigcirc p)$;

$((p \Rightarrow q) . (p \bigcirc r)) \Rightarrow (q \bigcirc r)$; $((p \Rightarrow q) . \neg(q \bigcirc r)) \Rightarrow \neg(p \bigcirc r)$;

$((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow s) . (p \bigcirc q)) \Rightarrow (r \bigcirc s)$; $((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow s) . \neg(r \bigcirc s)) \Rightarrow \neg(p \bigcirc q)$;

$((p . q) \bigcirc r) \Leftrightarrow ((q . r) \bigcirc p) \Leftrightarrow ((p . r) \bigcirc q) \Leftrightarrow (p \bigcirc (q . r)) \Leftrightarrow (q \bigcirc (p . r)) \Leftrightarrow (r \bigcirc (p . q))$;

$(\neg(p \bigcirc r) . \neg(q \bigcirc \neg r)) \Rightarrow \neg(p \bigcirc q)$; $((p \Rightarrow \neg r) . (q \Rightarrow r)) \Rightarrow \neg(p \bigcirc q)$;

$((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg(p \bigcirc p)$; $((p \Rightarrow q) . (p \bigcirc p)) \Rightarrow (q \bigcirc q)$;

$((p \Rightarrow q) . \neg(q \bigcirc q)) \Rightarrow \neg(p \bigcirc p)$; $((p \bigcirc p) . \neg(q \bigcirc q)) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$;

$((p \Rightarrow q) . (p \bigcirc p)) \Rightarrow (p \bigcirc q)$; $((p \Rightarrow q) . \neg(p \bigcirc q)) \Rightarrow \neg(p \bigcirc p)$;

$((p \bigcirc p) . \neg(p \bigcirc q)) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$; $((p \bigcirc p) . (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$;

$(p \bigcirc p) \Rightarrow \neg((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow \neg q))$; $(p \bigcirc p) \Rightarrow ((p \bigcirc q) \lor (p \bigcirc \neg q))$; $p \Rightarrow (p \bigcirc p)$;

$\neg(p \bigcirc p) \Rightarrow \neg p$; $(p \bigcirc (q \lor r)) \Rightarrow ((p \bigcirc q) \lor (p \bigcirc r))$;

$((p \bigcirc q) \lor (p \bigcirc r)) \Rightarrow (p \bigcirc (q \lor r))$;

$\Diamond p \Leftrightarrow (p \bigcirc p) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg p)$; $\neg\Diamond p \Leftrightarrow \neg(p \bigcirc p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg p)$;

$\Diamond\neg p \Leftrightarrow (\neg p \bigcirc \neg p) \Leftrightarrow \neg(\neg p \Rightarrow p)$; $\neg\Diamond\neg p \Leftrightarrow \neg(\neg p \bigcirc \neg p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow p)$;

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p . \neg q) \Rightarrow \neg(p . \neg q)) \Leftrightarrow \neg((p . \neg q) \bigcirc (p . \neg q))$;

$\Diamond(p . q) \Leftrightarrow ((p . q) \bigcirc (p . q)) \Leftrightarrow (p \bigcirc q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$;

$\neg\Diamond(p . q) \Leftrightarrow \neg((p . q) \bigcirc (p . q)) \Leftrightarrow \neg(p \bigcirc q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$;

$\Diamond(p . q . r) \Leftrightarrow ((p . q . r) \bigcirc (p . q . r)) \Leftrightarrow ((p . q) \bigcirc r) \Leftrightarrow ((q . r) \bigcirc p) \Leftrightarrow ((p . r) \bigcirc q)$ etc.

$\Leftrightarrow \neg((p . q) \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow \neg((q . r) \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg((p . r) \Rightarrow \neg q)$;

$\Diamond(p . q . r . s \ldots) \Leftrightarrow (p \bigcirc (q . r . s \ldots)) \Leftrightarrow (q \bigcirc (p . r . s \ldots)) \Leftrightarrow ((p . q) \bigcirc (r . s \ldots))$, etc. $\Leftrightarrow$

$\neg(q . r . s \ldots \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg(p . r . s \ldots \Rightarrow \neg q)$, etc.

$p \Rightarrow \Diamond p$; $\neg\Diamond p \Rightarrow \neg p$; $\neg\Diamond\neg p \Rightarrow p$; $\neg\Diamond\neg p \Rightarrow \Diamond p$; $\neg p \Rightarrow \Diamond\neg p$; $\neg\Diamond p \Rightarrow \Diamond\neg p$;

$((p \Rightarrow q) . \neg\Diamond q) \Rightarrow \neg\Diamond p$; $((p \Rightarrow q) . \Diamond p) \Rightarrow \Diamond q$; $((p \Rightarrow q) . \Diamond\neg q) \Rightarrow \Diamond\neg p$;

$((p \Rightarrow q) . \neg\Diamond\neg p) \Rightarrow \neg\Diamond\neg q$; $(((p . q) \Rightarrow r) . ((p . \neg q) \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;

$(\neg\Diamond\neg p . ((p . q) \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$; $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg(p \supset q)$; $\neg\Diamond(p . \neg p)$;

$\neg\Diamond\neg(p \lor \neg p)$; $p \Rightarrow ((p . q) \lor (p . \neg q))$; $((p . q) \lor (p . \neg q)) \Rightarrow p$;

$p \Leftrightarrow (p . (q \lor \neg q)) \Leftrightarrow ((p . q) \lor (p . \neg q))$

Tabell 13. Konsistens och de modala funktionerna

$\Diamond(p.q)\Rightarrow\Diamond p$; $\Diamond p\Rightarrow\Diamond(p\vee q)$; $\neg(p\bigcirc p)\Rightarrow\neg(p\bigcirc q)$; $(p\bigcirc q)\Rightarrow(p\bigcirc p)$;

$\Diamond(p.q)\Rightarrow\Diamond q$; $\Diamond(p.q)\Rightarrow(\Diamond p.\Diamond q)$; $\Diamond(p.q.r\ldots)\Rightarrow(\Diamond p.\Diamond q.\Diamond r\ldots)$;

$\neg\Diamond p\Rightarrow\neg\Diamond(p.q)$; $\neg\Diamond q\Rightarrow\neg\Diamond(p.q)$; $(\neg\Diamond p\vee\neg\Diamond q)\Rightarrow\neg\Diamond(p.q)$;

$(\neg\Diamond\neg p\vee\neg\Diamond\neg q)\Rightarrow\neg\Diamond\neg(p\vee q)$; $\Diamond\neg p\Rightarrow\Diamond\neg(p.q)$; $\Diamond\neg q\Rightarrow\Diamond\neg(p.q)$;

$(\Diamond\neg p\vee\Diamond\neg q)\Rightarrow\Diamond\neg(p.q)$; $\neg\Diamond\neg(p.q)\Rightarrow\neg\Diamond\neg p$; $\neg\Diamond\neg(p.q)\Rightarrow\neg\Diamond\neg q$;

$\neg\Diamond\neg(p.q)\Rightarrow(\neg\Diamond\neg p.\neg\Diamond\neg q)$; $\neg\Diamond(p\vee q)\Rightarrow\neg\Diamond p$; $\neg\Diamond(p\vee q)\Rightarrow\neg\Diamond q$;

$\neg\Diamond(p\vee q)\Rightarrow(\neg\Diamond p.\neg\Diamond q)$; $\Diamond p\Rightarrow\Diamond(p\vee q)$; $\Diamond q\Rightarrow\Diamond(p\vee q)$;

$(\Diamond p\vee\Diamond q)\Rightarrow\Diamond(p\vee q)$; $\neg\Diamond\neg p\Rightarrow\neg\Diamond\neg(p\vee q)$; $\neg\Diamond\neg q\Rightarrow\neg\Diamond\neg(p\vee q)$;

$(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow(p\bigcirc q)$; $(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow(p\bigcirc r)$; $(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow(q\bigcirc r)$;

$(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow((p\bigcirc q).(p\bigcirc r))$; $(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow((p\bigcirc q).(p\bigcirc r).(q\bigcirc r))$;

$(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow((p\bigcirc p).(q\bigcirc q).(r\bigcirc r).(p\bigcirc q).(p\bigcirc r).(q\bigcirc r))$;

$((p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r))\Rightarrow((p\Rightarrow(q\vee r))$; $((p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r)\vee(\neg q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow(q\vee r))$;

$(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow(q\vee r))$; $(p\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow(q\vee r))$; $((p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r))\Rightarrow((p.q)\Rightarrow r)$;

$(p\Rightarrow r)\Rightarrow((p.q)\Rightarrow r)$; $(q\Rightarrow r)\Rightarrow((p.q)\Rightarrow r)$; $(p.(q.\neg q))\Leftrightarrow(q.\neg q)$;

$p\Leftrightarrow(p\vee(q.\neg q))$;

$(p\Rightarrow q)\Rightarrow((p.r)\Rightarrow(q.r))$; $((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow(q.r))$;

$(p\Rightarrow(q.r))\Rightarrow((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))$; $(p\Rightarrow(q.r))\Leftrightarrow((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))$;

$(p\Rightarrow q)\Rightarrow((p\vee r)\Rightarrow(q\vee r))$; $((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow r))\Rightarrow((p\vee q)\Rightarrow r)$;

$((p\vee q)\Rightarrow r)\Rightarrow((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow r))$; $((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow r))\Leftrightarrow((p\vee q)\Rightarrow r)$;

$((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow s))\Rightarrow((p.q)\Rightarrow(r.s))$; $((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow s))\Rightarrow((p\vee q)\Rightarrow(r\vee s))$;

$((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow(q\vee r))$; $(p\bigcirc(q\vee r))\Rightarrow((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc r))$;

$((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc r))\Rightarrow(p\bigcirc(q\vee r))$; $(p\bigcirc(q\vee r))\Leftrightarrow((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc r))$;

$(p\bigcirc p)\Leftrightarrow((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc\neg q))$;

$\Diamond p\Leftrightarrow((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc\neg q))\Leftrightarrow(\Diamond(p.q)\vee\Diamond(p.\neg q))$;

$\neg\Diamond p\Leftrightarrow(\neg(p\bigcirc q).\neg(p\bigcirc\neg q))\Leftrightarrow((p\Rightarrow\neg q).(p\Rightarrow q))$;

$\neg\Diamond\neg p\Leftrightarrow((q\Rightarrow p).(\neg q\Rightarrow p))$; $\neg\Diamond p\Rightarrow(p\Rightarrow q)$; $\neg\Diamond\neg p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$;

$\neg(p\Rightarrow q)\Rightarrow\Diamond p$; $\neg(q\Rightarrow p)\Rightarrow\Diamond\neg p$; $(\neg\Diamond p.\neg\Diamond q)\Leftrightarrow\neg\Diamond(p\vee q)$;

$(\neg\Diamond\neg p.\neg\Diamond\neg q)\Leftrightarrow\neg\Diamond\neg(p.q)$; $(\Diamond p\vee\Diamond q)\Leftrightarrow\Diamond(p\vee q)$;

$(\neg\Diamond p.\neg\Diamond q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$; $(\neg\Diamond\neg p.\neg\Diamond\neg q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$; $\Diamond(p.q)\Rightarrow\Diamond p$;

$\Diamond p\Rightarrow\Diamond(p\vee q)$; $\neg(p\bigcirc p)\Rightarrow\neg(p\bigcirc q)$

Tabell 14. Konsistens postulat och teorem härledbara med detta

Än så länge innehåller alla teorem jag har tagit upp endast en typ av modala operatorer, nämligen aletiska. Aletisk-deontisk logik innehåller emellertid två olika typer av modala operatorer: aletiska och deontiska. Vi kan därför i aletisk-deontisk logik undersöka hur de olika typerna av operatorer förhåller sig till varandra. Vi kan t.ex. undersöka hur olika normativa satser är relaterade till olika satser som uttalar sig om konsistens, inkonsistens och strikt implikation. Jag kommer att koncentrera mig på två typer av aletisk-deontiska system, en typ som innehåller tablåregeln T-MO och en typ som innehåller tablåregeln T-OC (Rönnedal (2015b)). Jag kommer att nämna några olika teorem som är bevisbara i dessa system och jag kommer att gå igenom några bevis som exempel. Anledningen till att jag koncentrera mig på dessa typer av system är att T-MO och T-OC är två av de filosofiskt mest intressanta reglerna. I alla tablåsystem som innehåller T-OC kan vi bevisa en form av den s.k. bör-kan tesen, som påstår att något är obligatoriskt endast om det är möjligt. Och i alla system som innehåller T-MO kan vi bevisa en form av den s.k. mål-medel principen, som hävdar att alla nödvändiga konsekvenser av någonting som bör vara fallet bör vara fallet.

(Meta)Teorem 4. (i) Alla satser i Tabellerna 15–18 är teorem i alla aletisk-deontiska tablåsystem som innehåller T-MO. **(ii)** Alla satser i Tabellerna 19–20 är teorem i alla aletisk-deontiska tablåsystem som innehåller T-OC.

Bevis. Jag skall gå igenom några exempel och lämnar resten till läsaren.

$$((A \wedge B) \ominus C) \supset ((OA \wedge OB) \supset FC)$$
$$(OA \wedge OB) \supset (((A \wedge B) \ominus C) \supset FC)$$
$$((OA \wedge OB) \wedge ((A \wedge B) \ominus C)) \supset FC$$
$$(OA \wedge (A \ominus (B \vee C))) \supset (FB \wedge FC)$$
$$OA \supset ((A \ominus (B \vee C)) \supset (FB \wedge FC))$$
$$(A \ominus (B \vee C)) \supset (OA \supset (FB \wedge FC))$$
$$(OC \wedge ((A \vee B) \ominus C)) \supset (FA \wedge FB)$$
$$OC \supset (((A \vee B) \ominus C) \supset (FA \wedge FB))$$
$$((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))$$
$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \ominus C)) \supset F(A \wedge C)$$
$$(((A \Rightarrow B) \wedge (B \ominus C)) \wedge OA) \supset FC$$
$$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (((C \ominus D) \wedge OA) \supset FB)$$
$$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (((C \ominus D) \wedge OB) \supset FA)$$
$$(A \Rightarrow B) \supset (PA \supset (B \bigcirc B))$$
$$(PA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset (B \bigcirc B)$$
$$(A \Rightarrow B) \supset ((B \ominus B) \supset FA)$$
$$((B \ominus B) \wedge (A \Rightarrow B)) \supset FA$$
$$(O(A \vee B) \wedge (B \ominus B)) \supset OA$$
$$(O(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \neg B)) \supset OA$$
$$(OA \vee OB) \supset (((A \vee B) \Rightarrow C) \supset OC)$$
$$(PA \vee PB) \supset (((A \vee B) \Rightarrow C) \supset PC)$$

$FC\supset(((A\vee B)\Rightarrow C)\supset(FA\wedge FB))$
$PA\supset((A\Rightarrow(B\vee C))\supset(PB\vee PC))$
$(FB\wedge FC)\supset((A\Rightarrow(B\vee C))\supset FA)$
$(OA\wedge OB)\supset(((A\wedge B)\Rightarrow C)\supset OC)$
$OA\supset((A\Rightarrow(B\wedge C))\supset(OB\wedge OC))$
$PA\supset((A\Rightarrow (B\wedge C))\supset(PB\wedge PC))$
$(FB\vee FC)\supset((A\Rightarrow(B\wedge C))\supset FA)$
$(O(A\vee B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow C)))\supset OC$
$(O(A\vee B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)))\supset O(C\vee D)$
$(OA\wedge((A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)))\supset(OB\wedge OC)$
$(O(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\vee(B\Rightarrow D)))\supset O(C\vee D)$
$(OA\wedge((A\Rightarrow B)\vee(A\Rightarrow C)))\supset O(B\vee C)$
$(O(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)))\supset(OC\wedge OD)$
$(OA\wedge((A\ominus\neg B)\wedge(A\ominus\neg C)))\supset(OB\wedge OC)$
$(O(A\wedge B)\wedge((A\ominus\neg C)\wedge(B\ominus\neg D)))\supset(OC\wedge OD)$

Tabell 15. Teorem i TS-MO

$P(A\wedge B)\supset(A\bigcirc B)$	$(A\ominus B)\supset F(A\wedge B)$
$((A\ominus B)\wedge OA)\supset FB$	$((A\ominus B)\wedge OB)\supset FA$
$(OA\wedge(A\ominus B))\supset FB$	$(OB\wedge(A\ominus B))\supset FA$
$OA\supset((A\ominus B)\supset FB)$	$OB\supset((A\ominus B)\supset FA)$
$(A\ominus B)\supset(OA\supset FB)$	$(A\ominus B)\supset(OB\supset FA)$
$(\Box A\wedge(A\ominus B))\supset FB$	$(\Box B\wedge(A\ominus B))\supset FA$
$\Box A\supset((A\ominus B)\supset FB)$	$\Box B\supset((A\ominus B)\supset FA)$
$(A\ominus B)\supset(\Box A\supset FB)$	$(A\ominus B)\supset(\Box B\supset FA)$
$((A\ominus B)\wedge\Box A)\supset FB$	$((A\ominus B)\wedge\Box B)\supset FA$
$(PA\wedge(A\ominus B))\supset\neg OB$	$(PB\wedge(A\ominus B))\supset\neg OA$
$PA\supset((A\ominus B)\supset\neg OB)$	$PB\supset((A\ominus B)\supset\neg OA)$
$(A\ominus B)\supset(PA\supset\neg OB)$	$(A\ominus B)\supset(PB\supset\neg OA)$
$(A\Rightarrow B)\supset(\Box A\supset OB)$	$(A\ominus\neg B)\supset(\Box A\supset OB)$
$(A\Rightarrow B)\supset(PA\supset\Diamond B)$	$(A\ominus\neg B)\supset(PA\supset\Diamond B)$
$(A\Rightarrow B)\supset(⟠B\supset FA)$	$(A\ominus\neg B)\supset(⟠B\supset FA)$
$(OA\wedge(A\Rightarrow B))\supset OB$	$(OA\wedge(A\ominus\neg B))\supset OB$
$(A\Rightarrow B)\supset(OA\supset OB)$	$(A\ominus\neg B)\supset(OA\supset OB)$
$OA\supset((A\Rightarrow B)\supset OB)$	$OA\supset((A\ominus\neg B)\supset OB)$
$(PA\wedge(A\Rightarrow B))\supset PB$	$(PA\wedge(A\ominus\neg B))\supset PB$
$(A\Rightarrow B)\supset(PA\supset PB)$	$(A\ominus\neg B)\supset(PA\supset PB)$
$PA\supset((A\Rightarrow B)\supset PB)$	$PA\supset((A\ominus\neg B)\supset PB)$

$(FB \wedge (A \Rightarrow B)) \supset FA$	$(FB \wedge (A \ominus \neg B)) \supset FA$
$(A \Rightarrow B) \supset (FB \supset FA)$	$(A \ominus \neg B) \supset (FB \supset FA)$
$FB \supset ((A \Rightarrow B) \supset FA)$	$FB \supset ((A \ominus \neg B) \supset FA)$
$(PA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \Diamond B$	$(PA \wedge (A \ominus \neg B)) \supset \Diamond B$
$(A \Rightarrow B) \supset (PA \supset \Diamond B)$	$(A \ominus \neg B) \supset (PA \supset \Diamond B)$
$PA \supset ((A \Rightarrow B) \supset \Diamond B)$	$PA \supset ((A \ominus \neg B) \supset \Diamond B)$
$(KA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset PB$	$(KA \wedge (A \ominus \neg B)) \supset PB$
$(A \Rightarrow B) \supset (KA \supset PB)$	$(A \ominus \neg B) \supset (KA \supset PB)$
$KA \supset ((A \Rightarrow B) \supset PB)$	$KA \supset ((A \ominus \neg B) \supset PB)$
$(KA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \Diamond B$	$(KA \wedge (A \ominus \neg B)) \supset \Diamond B$
$(A \Rightarrow B) \supset (KA \supset \Diamond B)$	$(A \ominus \neg B) \supset (KA \supset \Diamond B)$
$KA \supset ((A \Rightarrow B) \supset \Diamond B)$	$KA \supset ((A \ominus \neg B) \supset \Diamond B)$
$(\neg OB \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \neg OA$	$(\neg OB \wedge (A \ominus \neg B)) \supset \neg OA$
$(A \Rightarrow B) \supset (\neg OB \supset \neg OA)$	$(A \ominus \neg B) \supset (\neg OB \supset \neg OA)$
$\neg OB \supset ((A \Rightarrow B) \supset \neg OA)$	$\neg OB \supset ((A \ominus \neg B) \supset \neg OA)$

Tabell 16. Teorem i TS-MO

Vi börjar med ett enkelt bevis av satsen $(A \ominus B) \supset F(A \wedge B)$, som säger att om A är inkonsistent med B, så är det förbjudet att A och B. Vi bevisar denna sats genom att skapa en sluten semantisk tablå för negationen av denna sats.

$(A \ominus B) \supset F(A \wedge B)$

(1) $\neg((A \ominus B) \supset F(A \wedge B))$, 0
(2) $A \ominus B$, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg F(A \wedge B)$, 0 [1, $\neg\supset$]
(4) $P(A \wedge B)$, 0 [3, $\neg F$]
(5) 0s1 [4, P]
(6) $A \wedge B$, 1 [4, P]
(7) A, 1 [6, $\wedge$]
(8) B, 1 [6, $\wedge$]
(9) 0r1 [5, T-MO]
↙ ↘
(10) $\neg A$, 1 [2, 9, $\ominus$] (11) $\neg B$, 1 [2, 9, $\ominus$]
(12) * [7, 10] (13) * [8, 11]

Alla grenar i tablån ovan är stängda. Alltså är hela tablån stängd. I steg (9) har vi använt tablåregeln T-MO. Detta är den enda tillgänglighetsregel vi har nyttjat. Det följer att $(A \ominus B) \supset F(A \wedge B)$ är ett teorem i varje T-MO system. Eftersom system av detta slag är sunda med avseende på klassen av alla ramar i vilka den deontiska tillgänglighetsrelationen är inkluderad i den aletiska tillgänglighetsrelationen (Rönnedal (2015b)), följer det att $(A\ominus B)\supset F(A\wedge B)$ är giltig i klassen av alla ramar av detta slag.

$((A\ominus B)\wedge OA)\supset FB$

$$
\begin{array}{c}
\neg(((A\ominus B)\wedge OA)\supset FB),\ 0\\
(A\ominus B)\wedge OA,\ 0\\
\neg FB,\ 0\\
A\ominus B,\ 0\\
OA,\ 0\\
PB,\ 0\\
0s1\\
B,\ 1\\
A,\ 1\\
0r1\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
\neg A,\ 1 & \neg B,\ 1\\
* & *
\end{array}
\end{array}
$$

$((A\vee B)\ominus C)\supset(OC\supset(FA\wedge FB))$

$$
\begin{array}{c}
\neg(((A\vee B)\ominus C)\supset(OC\supset(FA\wedge FB))),\ 0\\
(A\vee B)\ominus C,\ 0\\
\neg(OC\supset(FA\wedge FB)),\ 0\\
OC,\ 0\\
\neg(FA\wedge FB),\ 0\\
\swarrow \quad \searrow\\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg FA,\ 0\\
PA,\ 0\\
0s1\\
A,\ 1\\
C,\ 1\\
0r1\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\neg(A\vee B),\ 1\\ \neg A,\ 1\\ \neg B,\ 1\\ *\end{array} & \begin{array}{c}\neg C,\ 1\\ *\\ \\ \end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\neg FB,\ 0\\
PB,\ 0\\
0s1\\
B,\ 1\\
C,\ 1\\
0r1\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\neg(A\vee B),\ 1\\ \neg A,\ 1\\ \neg B,\ 1\\ *\end{array} & \begin{array}{c}\neg C,\ 1\\ *\\ \\ \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Ovanstående två semantiska tablåer bevisar att $((A \ominus B) \wedge OA) \supset FB$ och $((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))$ är teorem i alla system som innehåller T-MO. Båda dessa satser är därför också giltiga i klassen av alla ramar som uppfyller det semantiska villkoret C-MO (se Rönnedal (2015b)). Enligt $((A \ominus B) \wedge OA) \supset FB$ så gäller det att om A är inkonsistent med B och det är obligatoriskt att A, så är det förbjudet att B. Det innebär att FB följer ur $(A \ominus B)$ och OA i alla T-MO system. Antag att det är obligatoriskt att alla betalar skatt och att propositionen att alla betalar skatt är oförenlig med propositionen att du inte betalar skatt. Då följer det att det är förbjudet att du inte betalar skatt. $((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))$ säger att om A eller B är inkonsistent med C och det är obligatoriskt att C, så är det förbjudet att A och förbjudet att B.

Låt oss bevisa ytterligare ett par teorem.

$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$

$\neg(((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))), 0$
$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D), 0$
$\neg((C \ominus D) \supset F(A \wedge B)), 0$
$A \Rightarrow C, 0$
$B \Rightarrow D, 0$
$C \ominus D, 0$
$\neg F(A \wedge B), 0$
$P(A \wedge B), 0$
0s1
$A \wedge B, 1$
A, 1
B, 1
0r1
$\swarrow \quad \searrow$
$\neg A, 1$ C, 1
* $\swarrow \quad \searrow$
$\neg B, 1$ D, 1
* $\swarrow \quad \searrow$
$\neg C, 1$ $\neg D, 1$
*   *

Ovanstående tablå är sluten. Alltså utgör den ett bevis för satsen $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$ i alla system som innehåller T-MO. ”$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$” läses ”Om A strikt implicerar C och B strikt implicerar D, så gäller det att om C är inkonsistent med D så är det förbjudet att A och B”.

((A⇒C)∧(B⇒D))⊃(((C⊖D)∧OA)⊃FB)

¬(((A⇒C)∧(B⇒D))⊃(((C⊖D)∧OA)⊃FB)), 0
(A⇒C)∧(B⇒D), 0
¬(((C⊖D)∧OA)⊃FB), 0
(C⊖D)∧OA, 0
¬FB, 0
C⊖D, 0
OA, 0
PB, 0
A⇒C, 0
B⇒D, 0
0s1
B, 1
A, 1
0r1
↙ ↘
¬A, 1 C, 1
* ↙ ↘
¬B, 1 D, 1
* ↙ ↘
¬C, 1 ¬D, 1
* *

Satsen ”((A ⇒ C) ∧ (B ⇒ D)) ⊃ (((C ⊖ D) ∧ OA) ⊃ FB)” läses: ”Om A strikt implicerar C och B strikt implicerar D, så gäller det att om C är inkonsistent med D och det är obligatoriskt att A så är det förbjudet att B”.

(⟠B ∧ (A ⇒ B)) ⊃ FA	(⟠B ∧ (A ⊖ ¬B)) ⊃ FA
(A ⇒ B) ⇒ (⟠B ⊃ FA)	(A ⊖ ¬B) ⇒ (⟠B ⊃ FA)
⟠B ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ FA)	⟠B ⊃ ((A ⊖ ¬B) ⊃ FA)
(⟠B ∧ (A ⇒ B)) ⊃ NA	(⟠B ∧ (A ⇒ B)) ⊃ NA
(A ⇒ B) ⊃ (⟠B ⊃ NA)	(A ⇒ B) ⊃ (⟠B ⊃ NA)
⟠B ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ NA)	⟠B ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ NA)
(PA ∧ (A ⇒ B)) ⇒ (B ○ B)	(PA ∧ (A ⊖ ¬B)) ⊃ (B ○ B)

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (PA \supset (B \bigcirc B))$	$(A \ominus \neg B) \supset (PA \supset (B \bigcirc B))$
$PA \supset ((A \Rightarrow B) \supset (B \bigcirc B))$	$PA \supset ((A \ominus \neg B) \supset (B \bigcirc B))$
$((B \ominus B) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow FA$	$((B \ominus B) \wedge (A \ominus \neg B)) \supset FA$
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \ominus B) \supset FA)$	$(A \ominus \neg B) \supset ((B \ominus B) \supset FA)$
$(B \ominus B) \supset ((A \Rightarrow B) \supset FA)$	$(B \ominus B) \supset ((A \ominus \neg B) \supset FA)$

Tabell 17. Teorem i TS-MO

$(\neg A \Rightarrow A) \supset OA$
$PA \supset (A \bigcirc A)$
$(PA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset (A \bigcirc B)$
$P(A \wedge B) \ominus (A \Rightarrow \neg B)$
$P(A \wedge B) \ominus (A \ominus B)$
$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \supset FA$
$(P(A \wedge B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (A \bigcirc C)$
$((OA \wedge PB) \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset PC$
$PA \supset ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \supset (B \bigcirc C))$
$(PA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$
$PA \supset (((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \supset (B \bigcirc C))$
$(PA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset (A \bigcirc C)$
$((A \ominus C) \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset FA$
$((B \ominus C) \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset FA$
$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \supset ((B \ominus C) \supset FA)$
$(PA \wedge ((A \ominus \neg B) \wedge (A \ominus \neg C))) \ominus (B \ominus C)$
$(P(A \wedge B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (C \bigcirc D)$
$P(A \wedge B) \supset (((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (C \bigcirc D))$
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (P(A \wedge B) \supset (C \bigcirc D))$
$(P(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \ominus (C \ominus D)$
$((C \ominus D) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset F(A \wedge B)$
$(C \ominus D) \supset (((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset F(A \wedge B))$
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$

Tabell 18. Teorem i TS-MO

$OA \Rightarrow \Diamond A$	$\Diamond\!\!\!\!-\, A \Rightarrow \neg OA$
$\neg(OA \bigcirc \Diamond\!\!\!\!-\, A)$	$OA \ominus \Diamond\!\!\!\!-\, A$
$OA \supset (A \bigcirc A)$	$(A \ominus A) \supset \neg OA$
$OA \supset \neg(A \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow \neg A) \supset \neg OA$
$OA \Rightarrow (A \bigcirc A)$	$(A \ominus A) \Rightarrow \neg OA$
$OA \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg OA$

$OA \Rightarrow PA$	$OA \Rightarrow \neg FA$
$\neg(OA \bigcirc O\neg A)$	$OA \ominus O\neg A$
$\neg(FA \bigcirc F\neg A)$	$FA \ominus F\neg A$
$\neg(\Box A \bigcirc FA)$	$\Box A \ominus FA$
$\neg(OA \bigcirc (A \ominus A))$	$OA \ominus (A \ominus A)$
$\neg(O(A \vee B) \bigcirc (FA \wedge FB))$	$O(A \vee B) \ominus (FA \wedge FB)$
$\neg(O(A \vee B) \bigcirc (\diamondminus A \wedge \diamondminus B))$	$O(A \vee B) \ominus (\diamondminus A \wedge \diamondminus B)$
$(OA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset (B \bigcirc B)$	$((B \ominus B) \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \neg OA$
$(A \Rightarrow B) \supset (OA \supset (B \bigcirc B))$	$(A \Rightarrow B) \supset ((B \ominus B) \supset \neg OA)$
$OA \supset ((A \Rightarrow B) \supset (B \bigcirc B))$	$(B \ominus B) \supset ((A \Rightarrow B) \supset \neg OA)$
$O(A \wedge B) \supset (A \bigcirc B)$	$(A \ominus B) \supset \neg O(A \wedge B)$
$\neg((A \ominus B) \bigcirc O(A \wedge B))$	$(A \ominus B) \ominus O(A \wedge B)$
$(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$	$(FA \wedge FB) \supset (\neg A \bigcirc \neg B)$
$(A \ominus B) \supset \neg(OA \wedge OB)$	$(\neg A \ominus \neg B) \supset \neg(FA \wedge FB)$
$(A \ominus B) \ominus (OA \wedge OB)$	$(\neg A \ominus \neg B) \ominus (FA \wedge FB)$
$(A \ominus B) \supset (P\neg A \vee P\neg B)$	$(\neg A \ominus \neg B) \supset (PA \vee PB)$
$(A \ominus \neg B) \supset (OA \supset \Diamond B)$	$(A \Rightarrow B) \supset (OA \supset \Diamond B)$
$(OA \wedge (A \ominus \neg B)) \supset \Diamond B$	$(OA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \Diamond B$
$OA \supset ((A \ominus \neg B) \supset \Diamond B)$	$OA \supset ((A \Rightarrow B) \supset \Diamond B)$
$(A \ominus \neg B) \supset (OA \supset PB)$	$(A \Rightarrow B) \supset (OA \supset PB)$
$(OA \wedge (A \ominus \neg B)) \supset PB$	$(OA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset PB$
$OA \supset ((A \ominus \neg B) \supset PB)$	$OA \supset ((A \Rightarrow B) \supset PB)$
$(A \ominus \neg B) \supset (\Box A \supset PB)$	$(A \Rightarrow B) \supset (\Box A \supset PB)$
$(\Box A \wedge (A \ominus \neg B)) \supset PB$	$(\Box A \wedge (A \Rightarrow B)) \supset PB$
$\Box A \supset ((A \ominus \neg B) \supset PB)$	$\Box A \supset ((A \Rightarrow B) \supset PB)$
$(A \ominus \neg B) \supset (FB \supset \neg \Box A)$	$(A \Rightarrow B) \supset (FB \supset \neg \Box A)$
$(FB \wedge (A \ominus \neg B)) \supset \neg \Box A$	$(FB \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \neg \Box A$
$FB \supset ((A \ominus \neg B) \supset \neg \Box A)$	$FB \supset ((A \Rightarrow B) \supset \neg \Box A)$
$(A \ominus \neg B) \supset (\diamondminus B \supset \neg OA)$	$(A \Rightarrow B) \supset (\diamondminus B \supset \neg OA)$
$(\diamondminus B \wedge (A \ominus \neg B)) \supset \neg OA$	$(\diamondminus B \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \neg OA$
$\diamondminus B \supset ((A \ominus \neg B) \supset \neg OA)$	$\diamondminus B \supset ((A \Rightarrow B) \supset \neg OA)$

Tabell 19. Teorem i TS-OC

$(A \Rightarrow B) \supset (FB \supset \neg OA)$
$(FB \wedge (A \Rightarrow B)) \supset \neg OA$
$\neg(O(A \vee B) \wedge ((A \ominus A) \wedge (B \ominus B)))$
$\neg(O(A \wedge B) \wedge (A \ominus B))$
$\neg(O(A \wedge B) \wedge (A \Rightarrow \neg B))$

$(OA \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset (B \bigcirc C)$
$(O(A \wedge B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (B \bigcirc C)$
$(A \Rightarrow (B \wedge C)) \supset (OA \supset (B \bigcirc C))$
$OA \supset ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \supset (B \bigcirc C))$
$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$
$(FC \wedge ((A \supset B) \Rightarrow C)) \supset (A \bigcirc \neg B)$
$OA \supset ((A \ominus \neg(B \wedge C)) \supset (B \bigcirc C))$
$(OA \wedge ((A \ominus \neg B) \wedge (A \ominus \neg C))) \supset (B \bigcirc C)$
$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (C \bigcirc D)$
$((OA \vee OB) \wedge ((A \vee B) \Rightarrow C)) \supset PC$
$(FC \wedge ((A \vee B) \Rightarrow C)) \supset (\neg OA \wedge \neg OB))$
$(OA \wedge (A \Rightarrow (B \vee C))) \supset (PB \vee PC))$
$((FB \wedge FC) \wedge (A \Rightarrow (B \vee C))) \supset \neg OA$
$((OA \wedge OB) \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset PC$
$(FC \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset (\neg OA \vee \neg OB)$
$(FC \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset (P\neg A \vee P\neg B))$
$(OA \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset (PB \wedge PC))$
$((FB \vee FC) \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset \neg OA$
$((\neg PB \vee \neg PC) \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset \neg OA$
$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset PC$
$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (PC \vee PD)$
$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (PB \wedge PC)$
$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow D))) \supset (PC \vee PD)$
$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))) \supset (PB \vee PC)$
$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (PC \wedge PD)$
$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset \Diamond C$
$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (\Diamond C \vee \Diamond D)$
$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (\Diamond B \wedge \Diamond C)$
$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow D))) \supset (\Diamond C \vee \Diamond D)$
$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))) \supset (\Diamond B \vee \Diamond C)$
$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (\Diamond C \wedge \Diamond D)$

Tabell 20. Teorem i TS-OC

Vi har ovan gått igenom några exempel på bevis i system som innehåller regeln T-MO. Jag skall nu ta upp några exempel på bevis av några satser i aletisk-deontiska system som innehåller tablåregeln T-OC. Låt oss börja med ett relativ enkelt bevis av satsen $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$. Enligt $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ så gäller det att om det är obligatoriskt att A och det är obligatoriskt att

B, så är A konsistent med B (så är A och B konsistenta/förenliga). Enligt ”kontrapositionen” till detta teorem så gäller det att om A och B inte är förenliga, så är det inte både obligatoriskt att A och obligatoriskt att B.

$(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{(1)\ \neg((OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)),\ 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(2)\ OA \wedge OB,\ 0\ [1, \neg\supset]} \\
\multicolumn{2}{c}{(3)\ \neg(A \bigcirc B),\ 0\ [1, \neg\supset]} \\
\multicolumn{2}{c}{(4)\ OA,\ 0\ [2, \wedge]} \\
\multicolumn{2}{c}{(5)\ OB,\ 0\ [2, \wedge]} \\
\multicolumn{2}{c}{(6)\ A \ominus B,\ 0\ [3, \neg\bigcirc]} \\
\multicolumn{2}{c}{(7)\ 0s1\ [\text{T-OC}]} \\
\multicolumn{2}{c}{(8)\ 0r1\ [\text{T-OC}]} \\
\multicolumn{2}{c}{(9)\ A,\ 1\ [4, 7, O]} \\
\multicolumn{2}{c}{(10)\ B,\ 1\ [5, 7, O]} \\
\swarrow & \searrow \\
(11)\ \neg A,\ 1\ [6, 8, \ominus] & (12)\ \neg B,\ 1\ [6, 8, \ominus] \\
(13)\ *\ [9, 11] & (14)\ *\ [10, 12]
\end{array}
$$

Ovanstående tablå är sluten. Alltså utgör den ett bevis för $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ i alla system som innehåller T-OC. Eftersom alla T-OC system är giltiga i klassen av alla ramar där varje möjlig värld kan se åtminstone någon möjlig värld både aletiskt och deontiskt, är denna sats giltig i klassen av alla världar som uppfyller detta villkor.

Principen $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ utesluter förekomsten av genuina moraliska dilemman. Ett moraliskt dilemma är en situation där det är obligatoriskt att A och det är obligatoriskt att B samtidigt som A och B är oförenliga. Här följer ett exempel. Antag att du har lovat din vän att hjälpa henne att flytta. Då bör du hjälpa henne att flytta. Antag vidare att din dotter blir svårt sjuk samma dag som du har lovat din vän att flytta. Då bör du köra din dotter till sjukhuset. Men du hinner inte både hjälpa din vän och köra din dotter till sjukhuset. Propositionen att du hjälper din vän är oförenlig med propositionen att du kör din dotter till sjukhuset. Låt p stå för ”Du hjälper din vän att flytta” och q för ”Du kör din dotter till sjukhuset”. Då tycks följande satser vara sanna i vårt exempel: Op, Oq, $\neg(p \bigcirc q)$. Men om alla dessa satser är sanna, så kan inte $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ vara giltig. $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ utesluter därför moraliska dilemman av detta slag. Om det verkligen är omöjligt både att hjälpa din vän flytta och köra din dotter till sjukhuset, så är det inte både obligatoriskt att hjälpa din vän flytta och obligatoriskt att köra din dotter till sjukhuset. Det tycks bara som om alla satserna Op, Oq, $\neg(p \bigcirc q)$ är sanna. I vårt fall förefaller det t.ex. vara så att du har en prima facie plikt att hjälpa din vän flytta och att du har en prima facie plikt att köra din dotter till sjukhuset, men att plikten att köra din dotter till sjukhuset väger tyngre än plikten att hjälpa din vän att flytta. Därför har du ingen allt taget i beaktande plikt att hjälpa din vän att flytta. Däremot bör du om möjligt meddela henne att du har fått förhinder och kanske bör du försöka gottgöra henne i efterhand. (För mer information om moraliska dilemman, se t.ex. Rönnedal (2012b).)

Låt oss gå igenom ytterligare ett par exempel på teorem.

$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$

(1) $\neg((OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C))$, 0
(2) $OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg(B \bigcirc C)$, 0 [1, $\neg\supset$]
(4) OA, 0 [2, $\wedge$]
(5) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $A \Rightarrow B$, 0 [5, $\wedge$]
(7) $A \Rightarrow C$, 0 [5, $\wedge$]
(8) $B \ominus C$, 0 [3, $\neg\bigcirc$]
(9) 0s1 [T-OC]
(10) 0r1 [T-OC]
(11) A, 1 [4, 9, O]
(12) $A \supset B$, 1 [6, 10, $\Rightarrow'$]
(13) $A \supset C$, 1 [7, 10, $\Rightarrow'$]
(14) B, 1 [11, 12, MP]
(15) C, 1 [11, 13, MP]
↙ ↘
(16) $\neg B$, 1 [8, 10, $\ominus$] | (17) $\neg C$, 1 [8, 10, $\ominus$]
(18) * [14, 16] | (19) * [15, 17]

Ovanstående semantiska tablå är sluten. Alltså utgör den ett bevis för satsen $(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$ i varje tablåsystem som innehåller regeln T-OC. ”$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$” läses ”Om det är obligatoriskt att A och A strikt implicerar B och A strikt implicerar C, så är B och C konsistenta”. Från detta följer det att om B och C inte är konsistenta och A implicerar (medför) både B och C, så är det inte obligatoriskt att A. Så, i någon mening kan man säga att även denna sats utesluter en viss form av moraliska dilemman. Vi skall avsluta med att bevisa ytterligare en sats som är ett teorem i varje T-OC system, nämligen $(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (C \bigcirc D)$. Enligt denna formel gäller det att om det är obligatoriskt att A och B och A implicerar C och B implicerar D, så är C konsistent med D. Omvänt gäller det att om C och D inte är förenliga och A implicerar C och B implicerar D, så är det inte fallet att det är obligatoriskt att A och B.

$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (C \bigcirc D)$

$\neg((O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (C \bigcirc D)), 0$
$O(A \wedge B), 0$
$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D), 0$
$\neg(C \bigcirc D), 0$
$A \Rightarrow C, 0$
$B \Rightarrow D, 0$
$C \ominus D, 0$
$0s1$
$0r1$
$A \wedge B, 1$
$A, 1$
$B, 1$
$A \supset C, 1$
$B \supset D, 1$
$C, 1$
$D, 1$
↙ ↘
$\neg C, 1$ $\neg D, 1$
* *

Med hjälp av dessa exempel borde det vara relativt enkelt för läsaren att bevisa övriga teorem på egen hand.

Referenser

Anderson, A. R. (1956). The formal analysis of normative systems. I N. Rescher (red.). *The Logic of Decision and Action*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 1967, ss. 147–213.

Anderson, A. R. (1958). A reduction of deontic logic to alethic modal logic. *Mind*, Vol. 67, Nr. 265, ss. 100–103.

Anderson, A. R. (1959). On the logic of commitment. *Philosophical Studies* 10, ss. 23–27.

Anderson, A. R. (1967). Some Nasty Problems in the Formal Logic of Ethics. *Noûs*, Vol. 1, Nr. 4, ss. 345–360.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Letterkunde, N.S., Vol. 18, nr. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i Hintikka (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Blackburn, P., de Rijke, M. & Venema, Y. (2001). *Modal Logic*. Cambridge University Press.

Blackburn, P., van Benthem, J. & Wolter, F. (red.). (2007). *Handbook of Modal Logic*. Elsevier.

Chellas, B. F. (1980). *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R., & Posegga, J. (red.) (1999) *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fitting, M. & Mendelsohn, R. L. (1998). *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers.

Gabbay, D. M. (1976). *Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gabbay, D. M. & Guenthner, F. (red.). (2001). *Handbook of Philosophical Logic 2nd Edition*, Vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gabbay, D., Horty, J., Parent, X., van der Meyden, E. & van der Torre, L. (red.). (2013). *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*. College Publications.

Gabbay, D. M., Kurucz, A., Wolter, F. & Zakharyaschev, M. (2003). *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*. Amsterdam: Elsevier.

Garson, J. W. (2006). *Modal Logic for Philosophers*. New York: Cambridge University Press.

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das Logische Shliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Shliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning ”Investigations into Logical Deduction”, i Szabo (1969).
Girle, R. (2000). *Modal Logics and Philosophy*. McGill-Queen’s University Press.
Hilpinen, R. (red.). (1971). *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
Hilpinen, R. (red.). (1981). *New Studies in Deontic Logic Norms, Actions, and the Foundation of Ethics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press.
Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. New York: McGraw-Hill.
Kracht, M. (1999). *Tools and Techniques in Modal Logic*. Amsterdam: Elsevier.
Lewis, C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press.
Lewis, C. I. & Langford, C. H. (1932). *Symbolic Logic*. New York: Dover Publications. Second edition 1959.
Popkorn, S. (1994). *First Steps in Modal Logic*. Cambridge University Press.
Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.
Rescher, N. (red.). (1967). *The Logic of Decision and Action*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.
Rönnedal, D. (2009). Dyadic Deontic Logic and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 3–4, ss. 221–252.
Rönnedal, D. (2010). *An Introduction to Deontic Logic*. Charleston, SC.
Rönnedal, D. (2012). Bimodal Logic. *Polish Journal of Philosophy*. Vol. VI, Nr. 2, ss. 71–93.
Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.
Rönnedal, D. (2015). Alethic-Deontic Logic: Some Theorems. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 1, ss. 61–77.
Rönnedal, D. (2015b). Alethic-Deontic Logic: Deontic Accessibility Defined in Terms of Alethic Accessibility. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 3, ss. 27–68.
Rönnedal, D. (2015c). Alethic-Deontic Logic and the Alethic-Deontic Octagon. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 3, ss. 27–68.

Segerberg, K. (1971). *An Essay in Classical Modal Logic*. 3 Vol. Uppsala: University of Uppsala.
Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.
Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.
Zeman, J. J. (1973). *Modal Logic: The Lewis-Modal Systems*. Oxford: Clarendon Press.
Åqvist, L. (1987). *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*. Naples: Bibliopolis.
Åqvist, L. (2002). Deontic Logic. In Gabbay & Guenthner (red.). *Handbook of Philosophical Logic 2nd Edition*. Vol. 8, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, ss. 147–264.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se