FILOSOFISKA NOTISER

Årgång 2, Nr 2, September 2015

ISSN: 2002-0198

Hemsida: www.filosofiskanotiser.com

Connexive Semantic Tableaux

Storrs McCall

Abstract

Connexive logic differs from other alternatives to classical two-valued logic in containing theses such as $\sim(p\to\sim p)$ and $(p\to q)\to\sim(p\to\sim q)$ which are two-valuedly false. In this paper a semantic tableau formulation of connexive logic is constructed, using classical tableau rules plus an additional rule enabling a contradiction to be derived from any tableau item of the form $A\to\sim A$ or $\sim A\to A$. The resulting system is shown to be sound in the sense of never leading to contradiction, and complete in the sense that all valid connexive theses are derivable.

Introduction

Connexive implication takes its inspiration from remarks about conditionals $A\to B$ made by Sextus Empiricus in the 4th century BC, when it was said that "the very crows on the roof-tops were croaking about what conditionals were true". Sextus held that $A\to B$ was true when $\sim B$, the contradictory of B, was incompatible with A, and this would imply that no conditional of the form $p\to\sim p$ could be true, since the contradictory of $\sim p$ is never incompatible with p (see McCall (2012) and (2014) for historical details. Wansing (2014) is an excellent general introduction.)

Connexive systems are unlike all other non-classical logics in not being sub-systems of two-valued logic. The connexive formula $\sim(p\to\sim p)$ takes the value "F" in two-valued logic when p takes the value "F". In 1962 R.B. Angell produced four-valued matrices which satisfy $\sim(p\to\sim p)$ and $(p\to q)\to\sim(p\to\sim q)$, in addition to many two-valued tautologies. These matrices are axiomatized in McCall (1966). McCall (2014) contains a Gentzen *Sequenzen-kalkül* formulation of connexive logic, and the aim of the present paper is to construct a simple semantic tableau system for connexive theses.

Tableau rules for classical propositional logic are found in many introductory texts, e.g. Jeffrey (1967):

$A\to B$	$\sim(A\to B)$	$A\&B$	$\sim(A\&B)$	$A\vee B$	$\sim(A\vee B)$	$\sim\sim A$
↙ ↘	A	A	↙ ↘	↙ ↘	$\sim A$	A
$\sim A$ B	$\sim B$	B	$\sim A$ $\sim B$	A B	$\sim B$	

Filosofiska Notiser, Årgång 2, Nr. 2, September 2015, 3-18

The following tableau illustrates the use of these rules. Suppose we wish to show that Syl, the formula $(p\to q) \to [(q\to r)\to(p\to r)]$, is valid. We assume that Syl is false, and try to produce contradictions in every branch of the tableau:

1. $\sim\{(p\to q) \to [(q\to r)\to(p\to r)]\}$
2. $p\to q$ [1]
3. $\sim[(q\to r)\to(p\to r)]$ [1]
4. $q\to r$ [3]
5. $\sim(p\to r)$ [3]
6. p [5]
7. $\sim r$ [5]

↙ ↘

8. $\sim p$ q [2]

x   ↙ ↘

9. $\sim q$ r [4]

x   x

An "x" at the bottom of a branch indicates that the branch in question is closed. All three branches in the tableau where Syl is assumed to be false are closed, and consequently Syl is valid.

Tableau rules for non-classical connexive theses such as $\sim(p\to\sim p)$, known as "Aristotle", and $(p\to q) \to \sim(p\to\sim q)$, "Boethius", require an additional rule, which we may name "Aristotle". The rule Aristotle takes the following two forms:

$A\to\sim A$	$\sim A\to A$
A	$\sim A$
$\sim A$	A

Here is the tableau for the thesis Aristotle, where the rule DN permits the derivation of a wff A from ~~A at any point in a tableau:

1. $\sim\sim(p\to\sim p)$
2. $p\to\sim p$ [1, double negation (DN)]
3. p [2, the rule Aristotle]
4. $\sim p$ [2]
5. x

In the tableau for Boethius we shorten the work by making use of two new derived rules, the rule "Syl" and the rule "Contra". The rule "Syl" states that if we have a line in a branch of the form “A→B”, and another line in the same branch of the form “B→C”, then we may add a line “A→C”. The rule “Contra” (from the word “contraposition”) has 4 variants:

(1) If we have a line of the form A→B, we can add a line of the form ~B→~A.

The tableau derivation of the thesis (A→B) → (~B→~A) corresponding to (1) is as follows:

1. ~[(A→B) → (~B→~A)]
2. A→B [1]
3. ~(~B→~A) [1]
4. ~B [3]
5. ~~A [3]
↙ ↘
6. ~A B [2]
x x

(2) From A→~B derive B→~A.
(3) From ~A→B derive ~B→A.
(4) From ~A→~B derive B→A.

The tableaux corresponding to the rules Contra (2), (3) and (4) are similar to that for (1).

Here is Boethius:

1. ~[(p→q) → ~(p→~q)]
2. p→q [1]
3. ~~(p→~q) [1]
4. p→~q [3, DN]
5. q→~p [4, Contra (2)]
6. p→~p [2, 5 Syl]
7. p [6, Aristotle]
8. ~p [6, Aristotle]
x

1. Relevance

Connexive logic satisfies Anderson’s and Belnap’s criterion of relevance:- that in a valid implication, the antecedent should be “relevant” to the consequent. For example, that snow is white is irrelevant to the truth of “If

2+2=4, then 2+2=4". In general, $q\to(p\to p)$, though valid in 2-valued logic, is invalid in logics which require variable-sharing between the antecedent and consequent of true implications. In connexive tableaux, relevance is ensured by a system of checking:

$\sim[q\to(p\to p)]$ ^
q
$\sim(p\to p)$ ^
p ^
$\sim p$ ^

The checks attached to each of the lines 1, 3, 4 and 5 of the above tableau indicate that the line in question was <u>used</u> in procuring the contradiction. Line 2 was not used, and "q" stands as irrelevant to the process of closing the tableau. In connexive logic, a tableau at a world does not close unless every line in every path through the tableau is checked.

2. Double checking

Propositional theses such as

$[p\to(p\to q)]\to(p\to q)$ (Hilbert) and
$[p\to(q\to r)]\to[(p\to q)\to(p\to r)]$ (Frege),

where one variable occurs an odd number of times and all others occur an even number of times, are also invalid in connexive logic. This is shown by the failure of Hilbert and Frege to satisfy Angell's 4 x 4 implication/negation matrices for connexive logic (McCall (1966), p. 418). We have the following tableau for Hilbert:

1. $\sim\{[p\to(p\to q)] \to (p\to q)\}$ ^
2. $p\to(p\to q)$ ^ [1]
3. $\sim(p\to q)$ ^ [1]
4. p ^ ^ [3]
5. $\sim q$ ^ [3]
↙ ↘
6. $\sim p$ ^ $p\to q$ ^ [2]
↙ ↘
7. $\sim p$ ^ q ^ [6]

Note that p is checked twice on line 4.

Similarly in the case of Frege:

1. ~{[p→(q→r)] → [(p→q)→(p→r)]} ^
2. p→(q→r) ^ [1]
3. ~[(p→q)→(p→r)] ^ [1]
4. p→q ^ [3]
5. ~(p→r) ^ [3]
6. p ^ ^ [5]
7. ~r ^ [5]
↙ ↘
8. ~p ^ q→r ^ [2]
↙ ↘
9. ~p ^ q ^ [4]
↙ ↘
10. ~q ^ r ^ [8]

Again, p is double-checked on line 6, once to pair with ~p on line 8, and once to pair with ~p on line 9. In connexive tableaux, a path containing a formula that is checked more than once does not close, thus ruling out the non-connexive theses Hilbert and Frege.

3. Fallacies of necessity

In Anderson-Belnap logic, a contingent matter-of-fact proposition p cannot imply an implication q→r, since implications if true at all are true necessarily, not as a matter of contingent fact. Thus although (p→q)→(p→q) holds, the law of assertion p→[(p→q)→q] does not. But if p itself is an implication and hence necessary, all is well, and we have as a theorem P→[(P→q)→q] ("Weak Assertion"), where the capitalized variable stands for an implication. In the latter proposition there is no "fallacy of necessity": a contingent proposition does not imply a necessary one. p→[(p→q)→q] comes from (p→q)→(p→q) by commutation of the antecedents p→q and p, and such commutation is ruled out if in place of [p→(q→r)]→[q→(p→r)] ("Comm") we have as a theorem [p→(Q→r)]→[Q→(p→r)], where capitalized variables P and Q represent only implications, not contingent propositions. [p→(Q→r)]→[Q→(p→r)] may be labelled "Weak Comm". We have, in tableau form, the following for Comm:

1. ~{[p→(q→r)] → [q→(p→r)]} ^
2. p→(q→r) ^
3. ~[q→(p→r)] ^
4. q [from line 3]
5. ~(p→r) ^
6. p ^ [from line 5]
7. ~r
↙ ↘
8. ~p ^ q→r ^ [from line 2]
x ↙ ↘
9. ~q r
x

This tableau is prevented from closing by the fact that between q and ~q there lies (on the same branch) ~(p→r). We have as a rule that contradictory pairs consisting of variables and their negations which lie within the same branch cannot be checked if they are separated (also in the same branch) by formulae containing a negated arrow. This is the case with q on line 4, which is separated from ~q on line 9 by ~(p→r). Consequently the tableau does not close. In connexive tableaux, the ordering of the items in a tableau is crucial.

Consider now Weak Comm, i.e. [p→(Q→r)] → [Q→(p→r)], written in the form [p→[(q→r)→s)]] → [(q→r)→(p→s)]:

1. ~{[p→[(q→r)→s)]] → [(q→r)→(p→s)]}
2. p→[(q→r)→s] ^ [1]
3. ~[(q→r)→(p→s)] ^ [1]
4. q→r ^ [3]
5. ~(p→s) ^ [3]
6. p ^ [5]
7. ~s ^ [5]
↙ ↘
8. ~p ^ (q→r)→s ^ [2]
x ↙ ↘
9. ~(q→r) ^ s ^ [8]
10. q ^ x [9]
11. ~r ^ [9]
↙ ↘
12. ~q ^ r ^ [4]
x x

In this tableau, starting from the left, the first branch closes with p and ~p, the second with q and ~q, the third with ~r and r, and the fourth with ~s and s. These pairs are not separated by formulae containing a negated arrow. When Comm is replaced by Weak Comm, fallacies of necessity are avoided.

An alternative and more perspicuous way of bringing about the closure of the Weak Comm tableau, while leaving the Comm tableau open, is to adopt a tableau “rule of reiteration”, which permits the transfer of an implication from a higher to a lower position on a branch, while forbidding the transfer of a negated implication or a propositional variable. Suppose we adopt a new Anderson-Belnap type rule similar to their “rule of reiteration” in subproof formulations, namely that any implication of the form A→B may be reiterated from a subproof X to an inner subproof Y which is subordinate to X. For semantic tableaux, the rule is:

Tableau Rule of Reiteration. Any implication of the form A→B, where A and B are wffs, may be repeated from its position in a tableau T to a position lower down on some branch or branches of T.

Applying this rule to the tableau for Weak Comm, we get:

1. ~{[p→(Q→r)] → [Q→(p→r)]} ^
2. p→(Q→r) ^ [1]
3. ~[Q→(p→r)] ^ [1]
4. Q ^ [3]
5. ~(p→r) ^ [3]
6. p ^ [5]
7. ~r ^ [5]
↙ ↘
8. ~p ^ Q→r ^ [2]
x ↙ ↘
9. ~Q ^ r ^ [8]
10. Q ^ x [4, Tableau Reiteration]
x

4. Conjunction and Disjunction

There are straightforward tableau rules for conjunction and disjunction:

A&B	~(A&B)	A∨B	~(A∨B)
A	↙ ↘	↙ ↘	~A
B	~A ~B	A B	~B

Here are some typical tableaux:

1. ~{(p→q) → [(p&r)→(q&r)]} ^
2. p→q ^ [1]
3. ~[(p&r)→(q&r)] ^ [1]
4. p&r ^ [3]
5. ~(q&r) ^ [3]
6. p ^ [4]
7. r ^ [4]
↙ ↘
8. ~q ^ ~r ^ [5]
↙ ↘ x
9. ~p ^ q ^ [2]
x x

1. ~[(p∨q) → ~(~p&~q)] ^
2. p∨q ^ [1]
3. ~~(~p&~q) ^ [1]
4. ~p&~q ^ [3 DN]
5. ~p ^ [4]
6. ~q ^ [4]
↙ ↘
7. p ^ q ^ [2]
x x

Note that we used the rule for double negation at line 4.

1. ~[~(~p&~q) → (p∨q)] ^
2. ~(~p&~q) ^ [1]
3. ~(p∨q) ^ [1]
4. ~p ^ [3]
5. ~q ^ [3]
↙ ↘
6. ~~p ^ ~~q ^ [2]
x x

In the above tableau, we operated on line 3 before operating on line 2. If however we had operated on 2 before 3, the tableau would not have closed:

1. ~[~(~p&~q) → (p∨q)] ^
2. ~(~p&~q) ^   [1]
3. ~(p∨q) ^   [1]
↙   ↘
4. ~~p ^   ~~q ^   [2]
5. p ^   q ^   [4]
6. ~p ^   ~p   [3]
7. ~q   ~q ^   [3]

This tableau does not close because ~q is not checked on the left, and ~p is not checked on the right.

Exportation

1. ~{[(p&q)→r] → [p→(q→r)]}
2. (p&q)→r ^   [1]
3. ~[p→(q→r)] ^   [1]
4. p   [3]
5. ~(q→r) ^   [3]
6. q ^   [5]
7. ~r ^   [5]
↙   ↘
8. ~(p&q) ^   r ^   [2]
↙   ↘   x
9. ~p   ~q ^   [8]
x

No closure because ~(q→r) lies between p and ~p. Hence p and ~p cannot be checked. If however p is replaced by the implication variable P, yielding Weak Exportation [(P&q)→r] → [P→(q→r)], then P can be reiterated from line 4 to the line below line 9, and the tableau closes.

1. ~~(p&~p) ^
2. (p&~p) ^   [1 DN]
3. p ^   [2]
4. ~p ^   [2]
x

However, (p&q)→p, (p&p)→p, and p→(p&p) all lead to open tableaux:

1. ~[(p&q)→p] ^
2. p&q ^ [1]
3. ~p ^ [1]
4. p ^ [2]
5. q [2]

q is unchecked.

1. ~[(p&p)→p] ^
2. p&p ^ [1]
3. ~p ^ ^ [1]
4. p ^ [2]
5. p ^ [2]

~p is double checked.

1. ~[p→(p&p)] ^
2. p ^ ^ [1]
3. ~(p&p) ^ [1]
↙ ↘
4. ~p ^ ~p ^ [3]

p is double checked.

In the case of (p&p)→p and p→(p&p), these formulae fail to satisfy the connexive 4x4 truth-matrices for connexive implication found in McCall (1966), p. 418, where the conjunction matrix should read as follows (values 1 and 2 being "designated"):

&	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	3	4
4	4	3	4	3

However, there are other versions of connexive logic, including a Gentzen sequent formulation, in which (p&p)→p and p→(p&p) *are* provable, and in the future it may be possible to devise tableau rules which satisfy these formulae.

5. Completeness of the tableau method

To prove completeness of the tableau method for connexive implication, we must first of all give closed semantic tableaux for each of the connexive axioms given in McCall (1966), pp. 425-426. Start with the pure implicational fragment of connexive logic, which has as axioms Syl and [(p→p)→q]→q. The tableau for Syl was given above, and for [(p→p)→q]→q we have:

1. ~{[(p→p)→q]→q} ^
2. (p→p)→q ^ [1]
3. ~q ^ [1]
↙ ↘
4. ~(p→p) ^ q ^ [2]
5. p ^ x [4]
6. ~p ^ [4]
x

From Syl and [(p→p)→q]→q we derive p→p (see McCall (1966), p. 426). Moving from the pure implicational fragment of connexive logic to the implication-negation part, we add “Aristotle” and “Boethius” (see above, pp. 1 and 2). Conjunction and disjunction axioms are found in McCall (1966).

To prove completeness of the tableau method, we first construct closed semantic tableaux for each of the connexive axioms. Then we must show that any theorem that can be obtained from the axioms by use of the rules of substitution, detachment (modus ponens), and adjunction (from |- A and |- B derive |- A&B), also generates a closed tableau. Substitution is no problem. That the rule of detachment leads from closed tableaux to closed tableaux may be shown as follows.

Suppose we have a closed tableau for A, and a closed tableau for A→B. This means that the tableau headed by ~A closes, and the tableau headed by ~(A→B) closes:

~A　　　　　　　　~(A→B)
.　　　　　　　　　　.
.　　　　　　　　　　.
x　　　　　　　　　　x

We need to show that there is a tableau headed by ~B which closes, i.e.

~B
.
x

It is not difficult to construct such a tableau, based on reiteration of the classical two-valued theorem [(A→B) & A] → B:

1. ~B ^
2. [(A→B) & A] → B ^ [Reiteration of theorem]
↙ ↘
3. ~[(A→B) & A] ^　　　　B ^ [2]
↙ ↘　　　　　　　　　x
4. ~(A→B)　　~A [3]
.　　　　　　.
.　　　　　　.
x　　　　　　x

In this tableau, the left branch closes because it was originally assumed that there existed a closed tableau for A→B, and the middle branch closes because of the assumption that there was a closed tableau for A. The right branch closes because both B and ~B occur on the path. Consequently the entire tableau closes, i.e. there exists a closed tableau for B. Use of the rule of detachment in proving theorems from connexive axioms leads from closed tableaux to closed tableaux. If there is a closed tableau for formula X, and a closed tableau for X→Y, then there is a closed tableau for Y.

Finally, the rule of adjunction is justified by detachment plus reiteration of the theorem A → (B → (A&B)). The set of all closed semantic tableaux is complete. ■

6. Soundness of the tableau method

The 4-valued truth-matrices for connexive implication found in McCall (1966) include the amended conjunction matrix of section 4, and the following implication-negation one:

→	1	2	3	4	~
1	1	4	3	4	4
2	4	1	4	3	3
3	1	4	1	4	2
4	4	1	4	1	1

&	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	3	4
4	4	3	4	3

As before, the values 1 and 2 are designated. We shall show that the system of semantic tableaux rules for connexive logic is sound in the sense that all formulae provable using the rules satisfy the matrices, i.e. are four-valued tautologies in the sense of receiving either a 1 or a 2 for all values of their variables. If this is so, use of the tableau rules never leads to a contradiction.

Let v be a propositional interpretation which, starting with assignments to variables, takes every wff into one of the four values {1, 2, 3, 4}. Let b be any branch of a tableau that is being constructed, and let v be faithful to the branch b iff for every wff A on branch b, v(A) = 1 or 2.

Soundness lemma. (I am indebted to Priest (2001), p.15 ff., for the structure of this soundness proof.) If v is faithful to a branch b, and if a tableau rule (not including the rule Aristotle) is applied to b, then v is faithful to at least one of the branches generated by the application of the tableau rule.

Proof. Proof consists of a case-by-case examination of the tableau rules. I shall examine only the rules for implication; the rules for conjunction and disjunction are treated in a similar fashion.

Let A→B occur on branch b. Then b splits into two branches b’ and b”, with ~A on b’ and B on b”:

A→B
↙ ↘
~A   B

Since A→B is on b, and since v is faithful to b, then v(A→B) = 1 or 2. But v(A→B) = 2 is impossible, since the matrix for → contains no instances of the value 2. Hence v(A→B) = 1, and either (i) v(A) = v(B), or (ii) v(A) = 3 and v(B) = 1, or (iii) v(A) = 4 and v(B) = 2.

v(A) = v(B). There are four subcases:

(ia) v(A) = 1. Then v(B) = 1, and v is faithful to branch b”
(ib) v(A) = 2. Then v(B) = 2, and v is faithful to branch b”
(ic) v(A) = 3. Then v(~A) = 2, and v is faithful to branch b’
(id) v(A) = 4. Then v(~A) = 1, and v is faithful to branch b’.

v(A) = 3 and v(B) = 1. Then v is faithful to branch b”.

v(A) = 4 and v(B) = 2. Then b is faithful to branch b”.

Hence in all possible cases, v is faithful to one or other of the two branches b’ and b”.

Let ~(A→B) occur on branch b. Then b does not split:

~(A→B)
A
~B

Since v is faithful to b, then v(~(A→B)) = 1 or 2.

Subcase 1 v(~(A→B)) =1.

Subcase 1.1 v(A) = 1 and v(B) = 2. Hence v(~B) = 3.
This case is impossible, since v is not faithful to branch b.
Subcase 1.2 v(A) = 1 and v(B) = 4. Hence v(~B) =1.
In this case, v is faithful to branch b.
Subcase 1.3 v(A) = 2 and v(B) = 1. In this case v(~B) = 4.

This case is impossible, since v is not faithful to branch b.

Subcase 1.4 v(A) = 2 and v(B) = 3. Consequently v(~B) = 2, and v is faithful to branch b.

Subcase 1.5 v(A) = 3 and v(B) = 2.
1.6 v(A) = 3 and v(B) = 4.
1.7 v(A) = 4 and v(B) = 1.
1.8 v(A) = 4 and v(B) = 3.

In none of these subcases 1.5 to 1.8 is v faithful to branch b, because v(A) = 3 or 4. Consequently all of these subcases are impossible.

Subcase 2 v(~(A→B)) = 2.

It follows that v(A→B) = 3, and there are two subcases.

Subcase 2.1 v(A) = 1 and v(B) = 3. Then v(~B) = 2, and v is faithful to branch b.

Subcase 2.2 v(A) = 2 and v(B) = 4. Then v(~B) = 1, and v is faithful to branch b.

This concludes the proof of the soundness lemma. ■

Soundness theorem

Let |- A mean that A is derivable using the tableau method, and let |= A mean that A is a four-valued tautology. Then the soundness theorem states that:

If |- A, then |= A.

Proof. Assume |- A. Then, by the completeness of the tableau method there is a closed tableau T for ~A. Let v be a propositional interpretation that takes every line of T into one of the four values {1, 2, 3, 4}, and let v(~A) = 1 or 2. Let the initial branch of the tableau, on which ~A is located, be named "b". Since v(~A) = 1 or 2, v is faithful to b at level 1, the top of the tableau.

By the soundness lemma, if v is faithful to b at level 1, v must be faithful to b at each subsequent level, i.e. at levels 2, 3, 4, … . But this is impossible. Tableau T is closed, and every branch of T contains either two mutually contradictory items B and ~B introduced by the rule Aristotle, or at least one propositional variable and its negation. (If the former, the latter follows.) If v(p) = 1 or 2, v(~p) = 3 or 4, and v cannot be faithful to any of the branches of T. The assumption that v(~A) = 1 or 2 leads to a contradiction, and consequently v(~A) = 3 or 4. But then v(A) always equals 1 or 2, and it follows that |= A. ■

7. Conclusion

Semantic tableau rules for connexive logic have been introduced, and the set of formulae derivable using these rules has been shown to be sound and complete.

References

Angell, R. B. (1962). A propositional logic with subjunctive conditionals. *The Journal of Symbolic Logic* (JSL) 27, pp. 327-343.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.

McCall, S. (1966). Connexive implication. *JSL* 31, pp. 415-433.

------------ (2012). A history of connexivity. In Gabbay, Pelletier and Woods (eds.) *Handbook of the History of Logic*, vol. 11, pp. 415-449.

------------ (2014). Connexive Gentzen. *Logic Journal of the IGPL* 22, pp. 964-981.

Priest, G. (2001). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wansing, H. (2014). Connexive logic. In N. Zalta (ed.). *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Retrieved from <http://plato.stanford.edu/entries/logic-connexive/>.

Storrs McCall
Department of Philosophy
McGill University
storrs.mccall@mcgill.ca

Dyadisk Deontisk Logik:
En Härledning av Några Teorem

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Deontisk logik är en gren av logiken som handlar om normativa begrepp, satser, argument och system. Dyadisk deontisk logik är en typ av deontisk logik som innehåller särskilda symboler som kan användas för att analysera villkorliga normer av formen: ”Det bör vara fallet att A givet att B är fallet”, ”Det är tillåtet att A givet att B är fallet” och ”Det är förbjudet att A givet att B är fallet”. Sven Danielsson, Bengt Hansson, Bas van Fraassen, David Lewis, Frans von Kutschera och Lennart Åqvist är några av pionjärerna inom denna gren av logiken. Jag har i tidigare arbeten utvecklat en rad semantiska tablåsystem som bl.a. kan användas för att bevisa teorem och analysera och värdera argument i dyadisk deontisk logik. I den här uppsatsen visar jag hur ett av dessa system kan användas för att härleda en mängd av de axiom som presenteras av Danielsson, Hansson, van Fraassen, Lewis, von Kutschera och Åqvist.

1. Introduktion

Deontisk logik är en gren av logiken som handlar om normativa begrepp, satser, argument och system.[1] Dyadisk deontisk logik är en typ av deontisk logik som innehåller särskilda symboler som kan användas för att analysera villkorliga normer av formen: ”Det bör vara fallet att A givet att B är fallet”, ”Det är tillåtet att A givet att B är fallet” och ”Det är förbjudet att A givet att B är fallet”. Sven Danielsson (1968), Bengt Hansson (1969), Bas van Fraassen (1972), (1973), David Lewis (1973), (1974), Frans von Kutschera (1974) och Lennart Åqvist (1971), (1973), (1987) är några av pionjärerna inom denna gren av logiken. Se också Rescher (1958) och von Wright (1964). Jag har i tidigare arbeten utvecklat en rad semantiska tablåsystem som bl.a. kan användas för att bevisa teorem och analysera och värdera argument i dyadisk deontisk logik (Rönnedal (2009b); se också Rönnedal (2009) och Rönnedal (2012)). I den här uppsatsen visar jag hur ett av dessa system, ett system som kallas ”TG” i Rönnedal (2009b), kan användas för att

---

[1] För mer information om denna sorts logik, se t.ex. Gabbay, Horty, Parent, van der Meyden & van der Torre (red.). (2013), Hilpinen (1971), (1981), Rönnedal, (2010), (2012), Åqvist (1984), (1987), (2002). Mally (1926) och von Wright (1951) är två viktiga historiska referenser.

härleda en mängd av de axiom som presenteras av Danielsson, Hansson, van Fraassen, Lewis, von Kutschera och Åqvist.

Rönnedal (2009b) innehåller en lista på de teorem vi skall härleda i den här uppsatsen (teorem 19, del (i) och (ii)). På grund av det begränsade utrymmet var det dock inte möjligt att inkludera alla bevis i Rönnedal (2009b). En del härledningar är relativt enkla, men för att bevisa ett antal teorem krävs ett ganska stort mått av kreativitet. Jag tror därför att det är värt att publicera dessa bevis.[2]

2. Dyadisk deontisk logik

Danielsson, Hansson, van Fraassen, Lewis, von Kutschera och Åqvist använder något olika symboler, språk (några språk tillåter iteration av deontisk operatorer, några inte; några inkluderar aletiska operatorer, några inte; några innehåller komparativa värdebegrepp, några inte; antalet primitiva begrepp varierar, olika språk innehåller olika definitioner osv.), bevisteorier, och semantiska system. Dessutom använder de ibland olika namn på samma axiom, slutledningsregler, system osv. I den här uppsatsen kommer jag dock att ignorera dessa skillnader, eftersom de är relativt oväsentliga och det förenklar framställningen avsevärt.

Låt oss gå igenom den syntax, semantik och bevisteori vi använder i den här uppsatsen (för en mer utförlig framställning, se Rönnedal (2009b) eller Rönnedal (2012)).

2. Syntax

Språket L2 består av följande alfabet och satser.

2.1. Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …

De satslogiska konnektiven ¬ (negation), ∧ (konjunktion), ∨ (disjunktion), → (materiell implikation) och ↔ (materiell ekvivalens).

Tre deontiska operatorer O, P och F.

⊤ (verum), ⊥ (falsum), parenteser), (,] och [.

Tre aletiska operatorer □ (nödvändighet), ◇ (möjlighet) och ⟠ (omöjlighet).

---

[2] I Rönnedal (2009b) nämner jag några filosofiska skäl varför det är önskvärt att studera dyadisk deontisk logik. Det kanske viktigaste skälet är att vi tycks behöva någon form av dyadisk deontisk logik för att lösa Roderick M. Chisholms s.k. ”contrary-to-duty” paradox (se Chisholm (1963)). (Se också Prior (1954).) Jag skall inte här ta upp detta problem; istället hänvisar jag den intresserade läsaren till Rönnedal (2012, ss. 112-118) för mer information (se också Rönnedal (2012, ss. 118-121) för ytterligare ett par skäl att vara intresserad av dyadisk deontisk logik).

2.2. Satser

Språket L2 består av alla satser eller välformade formler (vff) som genereras från följande villkor.

Alla satsbokstäver, $\top$ och $\bot$ är vff.
Om A är en sats, så är $\neg A$ en sats.
Om A och B är satser, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ och $(A \leftrightarrow B)$ satser.
Om A och B är vff, så är också $O[A]B$, $P[A]B$ och $F[A]B$ vff.
Ingenting annat är en sats.

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår eller om den mångtydighet som uppstår är irrelevant i sammanhanget. De ”dyadiska” satserna i språket läses på följande sätt.

$O[A]B$: Det är obligatoriskt att B givet A.
$P[A]B$: Det är tillåtet att B givet A.
$F[A]B$: Det är förbjudet att B givet A.

Definitioner

$OA = O[\top]A$. $PA = P[\top]A$. $FA = F[\top]A$. $O'[B]A = P[B]\top \wedge O[B]A$. $P'[B]A = \neg O'[B]\neg A$ (eller $O[B]\bot \vee P[B]A$). $F'[B]A = \neg P'[B]A$ (eller $O'[B]\neg A$ eller $(P[B]\top \wedge F[B]A)$). $A \geq B = O[A \vee B]\bot \vee P[A \vee B]A$ (eller $P'[A \vee B]A$). $A > B$ $P[A \vee B]\top \wedge O[A \vee B]\neg B$ (eller $O'[A \vee B]\neg B$). $A = B = O[A \vee B]\bot \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B)$ (eller $P'[A \vee B]A \wedge P'[A \vee B]B$). ”$A > B$” läses ”A är bättre än B”, ”$A \geq B$” läses ”A är minst lika bra som B”, och ”$A = B$” läses ”A är lika bra som B”.

Semantik

I Rönnedal (2009b) introduceras två typer av semantik. Vi använder exakt samma semantik i den här uppsatsen. De utvidgade ramarna och modellerna innehåller en preferensrelation mellan möjliga världar. Den intuitiva tanken är att det är sant att det är obligatoriskt att A givet B ($O[B]A$) om och endast om A är sann i alla de bästa B-världarna, där en B-värld är en möjlig värld i vilken B är sann. Det är sant att det är tillåtet att A givet B ($P[B]A$) om och endast om A är sann i åtminstone en av de bästa B-världarna. Och det är sant att det är förbjudet att A givet B ($F[B]A$) om och endast om A inte är sann i någon av de bästa B-världarna.

Bevisteori

Vi använder exakt samma bevisteori i den här uppsatsen som i Rönnedal (2009b) och (2012). Denna teori bygger på s.k. semantiska tablåer. Om vi vill bevisa en sats A, så skapar vi en semantisk tablå för negationen av A. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är A giltig. Intuitivt innebär detta att antagandet att A är falsk leder till en motsägelse, varför A måste vara sann. Vi använder genomgående systemet TG i våra bevis. Detta är det starkaste systemet som beskrivs i Rönnedal (2009b) och det innehåller alla tablåregler som presenteras i denna uppsats.[3]

Låt oss nu gå igenom ett antal system och sedan visa att alla satser i dessa system kan bevisas i TG.

Von Kutschera

VK0.1 $P[B]A \leftrightarrow \neg O[B]\neg A$
VK1 $O[A]A$
VK2 $O[\neg A]A \rightarrow O[B]A$
VK3 $(O[\neg(A \rightarrow B)](A \rightarrow B) \wedge O[C]A) \rightarrow O[C]B$
VK4 $(O[B]A \wedge O[B]C) \rightarrow O[B](A \wedge C)$
VK5 $\neg O[A]\neg B \rightarrow (O[A \wedge B]C \leftrightarrow O[A](B \rightarrow C))$
VK6 $O[\neg A]A \rightarrow A$

DFL

Definitioner

$O'[B]A =_{df} P[B]\top \wedge O[B]A$ $O[B]A \leftrightarrow P'[B]\bot \vee O'[B]A$
$P'[B]A =_{df} O[B]\bot \vee P[B]A$ $P'[B]A \leftrightarrow O'[B]\top \wedge P'[B]A$

DFL-0.1. $P'[B]A \leftrightarrow \neg O'[B]\neg A$
DFL-1. $O'[B]A \rightarrow P'[B]A$
DFL-2. $O'[B](A \rightarrow C) \rightarrow (O'[B]A \rightarrow O'[B]C)$
DFL-3. $O'[B]A \rightarrow \Box O'[B]A$
DFL-4. $\Box A \rightarrow (P'[B]\bot \vee O'[B]A)$
DFL-α0. $\Box(A \leftrightarrow B) \rightarrow (O'[A]C \leftrightarrow O'[B]C)$
DFL-α1. $P'[A]\bot \vee O'[A]A$
DFL-α2. $(P'[A \wedge B]\bot \vee O'[A \wedge B]C) \rightarrow (P'[A]\bot \vee O'[A](B \rightarrow C))$
DFL-α3. $\Diamond A \rightarrow O'[A]\top$
DFL-α4. $(O'[A]\top \wedge P'[A]B) \rightarrow$
$((P'[A]\bot \vee O'[A](B \rightarrow C)) \rightarrow (P'[A \wedge B]\bot \vee O'[A \wedge B]C))$

---

[3] För mer information om tablåmetoden, se t.ex. Beth (1955), (1959), D'Agostino, Gabbay, Hähnle & Posegga (red.) (1999), Fitting (1972), (1983), (1999), Jeffrey (1967), Kripke (1959), Priest (2008), Rönnedal (2009), (2009b), (2012), Smullyan (1963), (1965), (1966), (1968).

Lewis

Definitioner

$O'[B]A$ =df $P[B]\top\wedge O[B]A$
$P'[B]A$ =df $O[B]\bot\vee P[B]A$

Lw1. $P'[C]A\leftrightarrow\neg O'[C]\neg A$
Lw2. $O'[C](A\wedge B)\leftrightarrow(O'[C]A\wedge O'[C]B)$
Lw3. $O'[C]A\rightarrow P'[C]A$
Lw4. $O'[C]\top\rightarrow O'[C]C$
Lw5. $O'[C]\top\rightarrow O'[B\vee C]\top$
Lw6. $(O'[B]A\wedge O'[C]A)\rightarrow O'[B\vee C]A$
Lw7. $(P'[C]\bot\wedge O'[B\vee C]A)\rightarrow O'[B]A$
Lw8. $(P'[B\vee C]B\wedge O'[B\vee C]A)\rightarrow O'[B]A$
Lw9. $O'[\top]\top$
Lw10. $A\rightarrow O'[A]\top$
Lw11. $O'[A]\top\rightarrow P'[P'[A]\bot]\bot$
Lw12. $O'[B]A\rightarrow P'[\neg O'[B]A]\bot$
Lw13. $P'[B]A\rightarrow P'[\neg P'[B]A]\bot$

Van Fraassen

Definitioner

$O'[B]A$ =df $P[B]\top\wedge O[B]A$
$P'[B]A$ =df $O[B]\bot\vee P[B]A$

vF1. $P'[B]A\leftrightarrow\neg O'[B]\neg A$
vF2 $O'[B](A\rightarrow C)\rightarrow(O'[B]A\rightarrow O'[B]C)$ (= DFL-2).
vF3 $O'[B]A\rightarrow P'[B]A$ (= Lw3).
vF4. $O'[A]B\rightarrow O'[A](B\wedge A)$
vF5. $O'[A\vee B]\neg B\rightarrow(O'[B\vee C]\neg C\rightarrow O'[A\vee C]\neg C)$
vF6. $P'[A\vee B]A\rightarrow(O'[B\vee C]\neg C\rightarrow O'[A\vee C]\neg C)$
vF7. $O'[A\vee B]\neg B\rightarrow(P'[B\vee C]B\rightarrow O'[A\vee C]\neg C)$

G1. $O[A]\bot\rightarrow\Box\neg A$
G2. $P[A]B\rightarrow(P[A\wedge B]C\rightarrow P[A](B\wedge C))$
G3. $O[A\vee B]\neg B\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg B$
G4. $(O[A\vee B]\neg B\wedge P[B\vee C]B)\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg C$
G5. $P[A\vee B]A\rightarrow P[A\vee B\vee C]\top$
G6. $P[A\vee B]A\rightarrow P[A\vee C]\top$
G7. $(P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow P[A\vee B]A$

Von Kutscheras system

VK0.1 $P[B]A \leftrightarrow \neg O[B]\neg A$

(1) $\neg(P[B]A \leftrightarrow \neg O[B]\neg A)$, 0

$\swarrow \quad \searrow$

(2) $P[B]A$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$]	(3) $\neg P[B]A$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$]
(4) $\neg\neg O[B]\neg A$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$]	(5) $\neg O[B]\neg A$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$]
(6) $O[B]\neg A$, 0 [4, $\neg\neg$]	(7) $O[B]\neg A$, 0 [3, $\neg P$]
(8) $0r_B1$ [2, P]	(9) $P[B]\neg\neg A$, 0 [5, $\neg O$]
(10) A, 1 [2, P]	(11) $0r_B1$ [9, P]
(12) $\neg A$, 1 [6, 8, O]	(13) $\neg\neg A$, 1 [9, P]
(14) * [10, 12]	(15) $\neg A$, 1 [7, 11, O]
	(16) * [13, 15]

VK1 $O[A]A$

(1) $\neg O[A]A$, 0

(2) $P[A]\neg A$, 0 [1, $\neg O$]

(3) $0r_A1$ [2, P]

(4) $\neg A$, 1 [2, P]

(5) A, 1 [3, $T\alpha1$]

(6) * [4, 5]

VK2 $O[\neg A]A \rightarrow O[B]A$

(1) $\neg(O[\neg A]A \rightarrow O[B]A)$, 0

(2) $O[\neg A]A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]

(3) $\neg O[B]A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]

(4) $P[B]\neg A$, 0 [3, $\neg O$]

(5) $0r_B1$ [4, P]

(6) $\neg A$, 1 [4, P]

(7) $0r_{\neg A}2$ [6, $T\alpha3$]

(8) A, 2 [2, 7, O]

(9) $\neg A$, 2 [7, $T\alpha1$]

(10) * [8, 9]

VK3 $(O[\neg(A\rightarrow B)](A\rightarrow B)\wedge O[C]A)\rightarrow O[C]B$

(1) $\neg((O[\neg(A\rightarrow B)](A\rightarrow B)\wedge O[C]A)\rightarrow O[C]B)$, 0

(2) $(O[\neg(A\rightarrow B)](A\rightarrow B)\wedge O[C]A)$ [1, $\neg\rightarrow$]

(3) $\neg O[C]B$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]

(4) $O[\neg(A\rightarrow B)](A\rightarrow B)$, 0 [2, $\wedge$]

(5) $O[C]A$, 0 [2, $\wedge$]

(6) $P[C]\neg B$, 0 [3, $\neg O$]

(7) $0r_C1$ [6, P]

(8) $\neg B$, 1 [6, P]

(9) A, 1 [5, 7, O]

$\swarrow \quad \searrow$

(10) $\neg(A\rightarrow B)$, 1 [CUT]	(11) $A\rightarrow B$, 1 [CUT]	
(12) $0r_{\neg(A\rightarrow B)}2$ [10, $T\alpha3$]	$\swarrow$	$\searrow$
(13) $A\rightarrow B$, 2 [4, 12, O]	(14) $\neg A$, 1 [11, $\rightarrow$]	(15) B, 1 [11, $\rightarrow$]
(16) $\neg(A\rightarrow B)$, 2 [12, $T\alpha1$]	(17) * [9, 14]	(18) * [8, 15]
(19) * [13, 16]		

VK4 $(O[B]A\land O[B]C)\to O[B](A\land C)$

(1) $\neg((O[B]A\land O[B]C)\to O[B](A\land C)), 0$

(2) $O[B]A\land O[B]C, 0\ [1, \neg\to]$

(3) $\neg O[B](A\land C), 0\ [1, \neg\to]$

(4) $O[B]A, 0\ [2, \land]$

(5) $O[B]C, 0\ [2, \land]$

(6) $P[B]\neg(A\land C), 0\ [3, \neg O]$

(7) $0r_B1\ [6, P]$

(8) $\neg(A\land C), 1\ [6, P]$

(9) $A, 1\ [4, 7, O]$

(10) $C, 1\ [5, 7, O]$

↙ ↘

(11) $\neg A, 1\ [8, \neg\land]$	(12) $\neg C, 1\ [8, \neg\land]$
(13) * [9, 11]	(14) * [10, 12]

VK5 $\neg O[A]\neg B\to(O[A\land B]C\leftrightarrow O[A](B\to C))$

(1) $\neg(\neg O[A]\neg B\to(O[A\land B]C\leftrightarrow O[A](B\to C))), 0$

(2) $\neg O[A]\neg B, 0\ [1, \neg\to]$

(3) $\neg(O[A\land B]C\leftrightarrow O[A](B\to C)), 0\ [1, \neg\to]$

↙ ↘

(4) $O[A\land B]C, 0\ [3, \neg\leftrightarrow]$	(5) $\neg O[A\land B]C, 0\ [3, \neg\leftrightarrow]$
(6) $\neg O[A](B\to C), 0\ [3, \neg\leftrightarrow]$	(7) $O[A](B\to C), 0\ [3, \neg\leftrightarrow]$
(8) $P[A]\neg(B\to C), 0\ [6, \neg O]$	(9) $P[A]\neg\neg B, 0\ [2, \neg O]$
(10) $0r_A1\ [8, P]$	(11) $P[A\land B]\neg C, 0\ [5, \neg O]$
(12) $\neg(B\to C), 1\ [8, P]$	(13) $0r_A1\ [9, P]$
(14) $B, 1\ [12, \neg\to]$	(15) $\neg\neg B, 1\ [9, P]$
(16) $\neg C, 1\ [12, \neg\to]$	(17) $B, 1\ [15, \neg\neg]$
(18) $0r_{A\land B}1\ [10, 14, T\alpha2]$	(19) $0r_{A\land B}2\ [11, P]$
(20) $C, 1\ [4, 18, O]$	(21) $\neg C, 2\ [11, P]$
(22) * [16, 20]	(23) $0r_A2\ [13, 17, 19, T\alpha4]$
	(24) $B, 2\ [13, 17, 19, T\alpha4]$
	(25) $B\to C, 2\ [7, 23, O]$

↙ ↘

(26) $\neg B, 2\ [25, \to]$	(27) $C, 2\ [25, \to]$
(28) * [24, 26]	(29) * [21, 27]

VK6 $O[\neg A]A\to A$

(1) $\neg(O[\neg A]A\to A), 0$

(2) $O[\neg A]A, 0\ [1, \neg\to]$

(3) $\neg A, 0\ [1, \neg\to]$

(4) $0r_{\neg A}1\ [3, T\alpha3]$

(5) $A, 1\ [2, 4, O]$

(6) $\neg A, 1\ [4, T\alpha1]$

(7) * [5, 6]

Systemet DFL

Definition O[B]A↔P′[B]⊥∨O′[B]A =
O[B]A↔((O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A))

Vänster till höger

(1) ¬(O[B]A→((O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A))), 0
(2) O[B]A, 0 [1, ¬→]
(3) ¬((O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A)), 0 [1, ¬→]
(4) ¬(O[B]⊥∨P[B]⊥), 0 [3, ¬∨]
(5) ¬(P[B]⊤∧O[B]A), 0 [3, ¬∨]
(6) ¬O[B]⊥, 0 [4, ¬∨]
(7) ¬P[B]⊥, 0 [4, ¬∨]

↙	↘
(8) ¬P[B]⊤, 0 [5, ¬∧]	(9) ¬O[B]A, 0 [5, ¬∧]
(10) P[B]¬⊥, 0 [6, ¬O]	(11) * [2, 9]
(12) O[B]¬⊤, 0 [8, ¬P]	
(13) 0r_B1 [10, P]	
(14) ¬⊥, 1 [10, P]	
(15) ¬⊤, 1 [12, 13, O]	
(16) * [15]	

Höger till vänster

(1) ¬(((O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A))→O[B]A), 0
(2) (O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A), 0 [1, ¬→]
(3) ¬O[B]A, 0 [1, ¬→]
(4) P[B]¬A, 0 [3, ¬O]
(5) 0r_B1 [4, P]
(6) ¬A, 1 [4, P]

↙		↘
(7) O[B]⊥∨P[B]⊥ [2, ∨]		(8) P[B]⊤∧O[B]A, 0 [2, ∨]
↙	↘	(9) P[B]⊤, 0 [8, ∧]
(10) O[B]⊥, 0 [7, ∨]	(11) P[B]⊥, 0 [7, ∨]	(12) O[B]A, 0 [8, ∧]
(13) ⊥, 1 [5, 10, O]	(14) 0r_B2 [11, P]	(15) A, 1 [5, 12, O]
(16) * [13]	(17) ⊥, 2 [11, P]	(18) * [6, 15]
	(19) * [17]	

Definition $P[B]A \leftrightarrow O'[B]\top \wedge P'[B]A =$
$P[B]A \leftrightarrow ((P[B]\top \wedge O[B]\top) \wedge (O[B]\bot \vee P[B]A))$

Vänster till höger

$(1)\ \neg(P[B]A \rightarrow ((P[B]\top \wedge O[B]\top) \wedge (O[B]\bot \vee P[B]A))),\ 0$
$(2)\ P[B]A,\ 0\ [1, \neg\rightarrow]$
$(3)\ \neg((P[B]\top \wedge O[B]\top) \wedge (O[B]\bot \vee P[B]A)),\ 0\ [1, \neg\rightarrow]$
↙ ↘

$(4)\ \neg(P[B]\top \wedge O[B]\top),\ 0\ [3, \neg\wedge]$		$(5)\ \neg(O[B]\bot \vee P[B]A),\ 0\ [3, \neg\wedge]$
↙	↘	$(6)\ \neg O[B]\bot,\ 0\ [5, \neg\vee]$
$(7)\ \neg P[B]\top,\ 0$	$(8)\ \neg O[B]\top,\ 0\ [4, \neg\wedge]$	$(9)\ \neg P[B]A,\ 0\ [5, \neg\vee]$
$(10)\ O[B]\neg\top,\ 0\ [7]$	$(11)\ P[B]\neg\top,\ 0\ [8, \neg O]$	$(12)\ *\ [2, 9]$
$(13)\ 0r_B1\ [2, P]$	$(14)\ 0r_B1\ [11, P]$	
$(15)\ A,\ 1\ [2, P]$	$(16)\ \neg\top,\ 1\ [11, P]$	
$(17)\ \neg\top,\ 1\ [10, 13]$	$(18)\ *\ [16]$	
$(19)\ *\ [17]$		

Höger till vänster

$(1)\ \neg(((P[B]\top \wedge O[B]\top) \wedge (O[B]\bot \vee P[B]A)) \rightarrow P[B]A),\ 0$
$(2)\ (P[B]\top \wedge O[B]\top) \wedge (O[B]\bot \vee P[B]A),\ 0\ [1, \neg\rightarrow]$
$(3)\ \neg P[B]A,\ 0\ [1, \neg\rightarrow]$
$(4)\ P[B]\top \wedge O[B]\top,\ 0\ [2, \wedge]$
$(5)\ O[B]\bot \vee P[B]A,\ 0\ [2, \wedge]$
$(6)\ P[B]\top,\ 0\ [4, \wedge]$
$(7)\ O[B]\top,\ 0\ [4, \wedge]$
$(8)\ O[B]\neg A,\ 0\ [3, \neg P]$
↙ ↘

$(9)\ O[B]\bot,\ 0\ [5, \vee]$	$(10)\ P[B]A,\ 0\ [5, \vee]$
$(11)\ 0r_B1\ [6, P]$	$(12)\ 0r_B1\ [10, P]$
$(13)\ \top,\ 1\ [6, P]$	$(14)\ A,\ 1\ [10, P]$
$(15)\ \bot,\ 1\ [9, 11, O]$	$(16)\ \neg A,\ 1\ [8, 12, O]$
$(17)\ *\ [15]$	$(18)\ *\ [14, 16]$

DFL-0.1. $P'[B]A \leftrightarrow \neg O'[B]\neg A =$
$(O[B]\bot \lor P[B]A) \leftrightarrow \neg(P[B]\top \land O[B]\neg A)$

Vänster till höger

(1) $\neg((O[B]\bot \lor P[B]A) \to \neg(P[B]\top \land O[B]\neg A)), 0$
(2) $O[B]\bot \lor P[B]A, 0$ [1, $\neg\to$]
(3) $\neg\neg(P[B]\top \land O[B]\neg A), 0$ [1, $\neg\to$]
(4) $P[B]\top \land O[B]\neg A, 0$ [3, $\neg\neg$]
(5) $P[B]\top, 0$ [4, $\land$]
(6) $O[B]\neg A, 0$ [4, $\land$]
(7) $0r_B1$ [5, P]
(8) $\top, 1$ [5, P]
↙ ↘

(9) $O[B]\bot, 0$ [2, $\lor$]	(10) $P[B]A, 0$ [2, $\lor$]
(11) $\bot, 1$ [7, 9, O]	(12) $0r_B2$ [10, P]
(13) * [11]	(14) $A, 2$ [10, P]
	(15) $\neg A, 2$ [6, 12, O]
	(16) * [14, 15]

Höger till vänster

(1) $\neg(\neg(P[B]\top \land O[B]\neg A) \to (O[B]\bot \lor P[B]A)), 0$
(2) $\neg(P[B]\top \land O[B]\neg A), 0$ [1, $\neg\to$]
(3) $\neg(O[B]\bot \lor P[B]A), 0$ [1, $\neg\to$]
(4) $\neg O[B]\bot, 0$ [3, $\neg\lor$]
(5) $\neg P[B]A, 0$ [3, $\neg\lor$]
(6) $P[B]\neg\bot, 0$ [4, $\neg$O]
(7) $O[B]\neg A, 0$ [5, $\neg$P]
↙ ↘

(8) $\neg P[B]\top, 0$ [2, $\neg\land$]	(9) $\neg O[B]\neg A, 0$ [2, $\neg\land$]
(10) $O[B]\neg\top, 0$ [8, $\neg$P]	(11) $P[B]\neg\neg A, 0$ [9, $\neg$O]
(12) $0r_B1$ [6, P]	(13) $0r_B1$ [11, P]
(14) $\neg\bot, 1$ [6, P]	(15) $\neg\neg A, 1$ [11, P]
(16) $\neg\top, 1$ [10, 12, O]	(17) $\neg A, 1$ [7, 13, O]
(18) * [16]	(19) * [15, 17]

DFL-1. $O'[B]A \rightarrow P'[B]A =$
$(P[B]\top \wedge O[B]A) \rightarrow (O[B]\bot \vee P[B]A)$

(1) $\neg((P[B]\top \wedge O[B]A) \rightarrow (O[B]\bot \vee P[B]A))$, 0
(2) $P[B]\top \wedge O[B]A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[B]\top$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $O[B]A$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $\neg O[B]\bot$, 0 [3, $\neg\vee$]
(7) $\neg P[B]A$, 0 [3, $\neg\vee$]
(8) $O[B]\neg A$, 0 [7, $\neg P$]
(9) $0r_B1$ [4, P]
(10) $\top$, 1 [4, P]
(11) A, 1 [5, 9, O]
(12) $\neg A$, 1 [8, 9, O]
(13) * [11, 12]

Notera att denna sats, liksom för övrigt flera andra satser, kan bevisas redan i det svagaste dyadiska systemet DDL (plus relevanta definitioner).

DFL-2. $O'[B](A \rightarrow C) \rightarrow (O'[B]A \rightarrow O'[B]C) =$
$(P[B]\top \wedge O[B](A \rightarrow C)) \rightarrow ((P[B]\top \wedge O[B]A) \rightarrow (P[B]\top \wedge O[B]C))$

(1) $\neg((P[B]\top \wedge O[B](A \rightarrow C)) \rightarrow ((P[B]\top \wedge O[B]A) \rightarrow (P[B]\top \wedge O[B]C)))$, 0
(2) $P[B]\top \wedge O[B](A \rightarrow C)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg((P[B]\top \wedge O[B]A) \rightarrow (P[B]\top \wedge O[B]C))$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[B]\top \wedge O[B]A$, 0 [3, $\neg\rightarrow$]
(5) $\neg(P[B]\top \wedge O[B]C)$, 0 [3, $\neg\rightarrow$]
(6) $P[B]\top$, 0 [2, $\wedge$]
(7) $O[B](A \rightarrow C)$ [2, $\wedge$]
(8) $P[B]\top$, 0 [4, $\wedge$]
(9) $O[B]A$, 0 [4, $\wedge$]
↙ ↘
(10) $\neg P[B]\top$, 0 [5, $\neg\wedge$]   (11) $\neg O[B]C$, 0 [5, $\neg\wedge$]
(12) * [6, 10]   (13) $P[B]\neg C$, 0 [11, $\neg O$]
(14) $0r_B1$ [13, P]
(15) $\neg C$, 1 [13, P]
(16) $A \rightarrow C$, 1 [7, 14, O]
(17) A, 1 [9, 14, O]
(18) C, 1 [16, 17, MP]
(19) * [15, 18]

DFL-3. O′[B]A→□O′[B]A =
(P[B]⊤∧O[B]A)→□(P[B]⊤∧O[B]A)

(1) ¬((P[B]⊤∧O[B]A)→□(P[B]⊤∧O[B]A)), 0
(2) P[B]⊤∧O[B]A, 0 [1, ¬→]
(3) ¬□(P[B]⊤∧O[B]A), 0 [1, ¬→]
(4) P[B]⊤, 0 [2, ∧]
(5) O[B]A, 0 [2, ∧]
(6) ◇¬(P[B]⊤∧O[B]A), 0 [3, ¬□]
(7) ¬(P[B]⊤∧O[B]A), 1 [6, ◇]

↙	↘
(8) ¬P[B]⊤, 1 [7, ¬∧]	(9) ¬O[B]A, 1 [7, ¬∧]
(10) O[B]¬⊤, 1 [8, ¬P]	(11) P[B]¬A, 1 [9, ¬O]
(12) $0r_B2$ [4, P]	(13) $1r_B2$ [11, P]
(14) ⊤, 2 [4, P]	(15) ¬A, 2 [11, P]
(16) $1r_B2$ [12, Ta6]	(17) $0r_B2$ [13, Ta6]
(18) ¬⊤, 2 [10, 16, O]	(19) A, 2 [5, 17, O]
(20) * [18]	(21) * [15, 19]

DFL-4. □A→(P′[B]⊥∨O′[B]A) =
□A→((O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A)

(1) ¬(□A→((O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A)), 0
(2) □A, 0 [1, ¬→]
(3) ¬((O[B]⊥∨P[B]⊥)∨(P[B]⊤∧O[B]A)), 0 [1, ¬→]
(4) ¬(O[B]⊥∨P[B]⊥), 0 [3, ¬∨]
(5) ¬(P[B]⊤∧O[B]A), 0 [3, ¬∨]
(6) ¬O[B]⊥, 0 [4, ¬∨]
(7) ¬P[B]⊥, 0 [4, ¬∨]
(8) P[B]¬⊥, 0 [6, ¬O]

↙	↘
(9) ¬P[B]⊤, 0 [5, ¬∧]	(10) ¬O[B]A, 0 [5, ¬∧]
(11) O[B]¬⊤, 0 [9, ¬P]	(12) P[B]¬A, 0 [10, ¬O]
(13) $0r_B1$ [8, P]	(14) $0r_B1$ [12, P]
(15) ¬⊥, 1 [8, P]	(16) ¬A, 1 [12, P]
(17) ¬⊤, 1 [11, 13, O]	(18) A, 1 [2, □]
(19) * [17]	(20) * [16, 18]

DFL-α0. $\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O'[A]C\leftrightarrow O'[B]C)$ =
$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((P[A]\top\wedge O[A]C)\leftrightarrow(P[B]\top\wedge O[B]C))$

$\neg(\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((P[A]\top\wedge O[A]C)\leftrightarrow(P[B]\top\wedge O[B]C)))$, 0
$\Box(A\leftrightarrow B)$, 0
$\neg((P[A]\top\wedge O[A]C)\leftrightarrow(P[B]\top\wedge O[B]C))$, 0
$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[A]C\leftrightarrow O[B]C)$, 0
$O[A]C\leftrightarrow O[B]C$, 0

↙	↘
$P[A]\top\wedge O[A]C$, 0	$\neg(P[A]\top\wedge O[A]C)$, 0
$\neg(P[B]\top\wedge O[B]C)$, 0	$P[B]\top\wedge O[B]C$, 0
$P[A]\top$, 0	$P[B]\top$, 0
$O[A]C$, 0	$O[B]C$, 0

↙	↘	↙	↘
$O[A]C$, 0	$\neg O[A]C$, 0	$O[A]C$, 0	$\neg O[A]C$, 0
$O[B]C$, 0	*	$O[B]C$, 0	$\neg O[B]C$, 0
			*

↙	↘	↙	↘
$\neg P[B]\top$, 0	$\neg O[B]C$, 0	$\neg P[A]\top$, 0	$\neg O[A]C$, 0
$O[B]\neg\top$, 0	*	$O[A]\neg\top$, 0	*
$0r_A1$		$0r_B1$	
$\top$, 1		$\top$, 1	
$O[A]\neg\top$, 0		$O[B]\neg\top$, 0	
$\neg\top$, 1		$\neg\top$, 1	
*		*	

DFL-α1. $P'[A]\bot\vee O'[A]A$ =
$(O[A]\bot\vee P[A]\bot)\vee(P[A]\top\wedge O[A]A)$

(1) $\neg((O[A]\bot\vee P[A]\bot)\vee(P[A]\top\wedge O[A]A))$, 0
(2) $\neg(O[A]\bot\vee P[A]\bot)$, 0 [1, $\neg\vee$]
(3) $\neg(P[A]\top\wedge O[A]A)$, 0 [1, $\neg\vee$]
(4) $\neg O[A]\bot$, 0 [2, $\neg\vee$]
(5) $\neg P[A]\bot$, 0 [2, $\neg\vee$]
(6) $P[A]\neg\bot$, 0 [4, $\neg O$]

↙	↘
(7) $\neg P[A]\top$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(8) $\neg O[A]A$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(9) $O[A]\neg\top$, 0 [7, $\neg P$]	(10) $P[A]\neg A$, 0 [8, $\neg O$]
(11) $0r_A1$ [6, P]	(12) $0r_A1$ [10, P]
(13) $\neg\bot$, 1 [6, P]	(14) $\neg A$, 1 [10, P]
(15) $\neg\top$, 1 [9, 11, O]	(16) A, 1 [12, Tα1]
(17) * [15]	(18) * [14, 16]

DFL-α2. $(P'[A\wedge B]\bot\vee O'[A\wedge B]C)\rightarrow(P'[A]\bot\vee O'[A](B\rightarrow C))$ =
$((O[A\wedge B]\bot\vee P[A\wedge B]\bot)\vee(P[A\wedge B]\top\wedge O[A\wedge B]C))\rightarrow((O[A]\bot\vee P[A]\bot)\vee$
$(P[A]\top\wedge O[A](B\rightarrow C)))$

(1) $\neg(((O[A\wedge B]\bot\vee P[A\wedge B]\bot)\vee(P[A\wedge B]\top\wedge O[A\wedge B]C))\rightarrow$
$((O[A]\bot\vee P[A]\bot)\vee(P[A]\top\wedge O[A](B\rightarrow C))))$, 0
(2) $(O[A\wedge B]\bot\vee P[A\wedge B]\bot)\vee(P[A\wedge B]\top\wedge O[A\wedge B]C)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg((O[A]\bot\vee P[A]\bot)\vee(P[A]\top\wedge O[A](B\rightarrow C)))$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $\neg(O[A]\bot\vee P[A]\bot)$, 0 [3, $\neg\vee$]
(5) $\neg(P[A]\top\wedge O[A](B\rightarrow C))$, 0 [3, $\neg\vee$]
↙ ↘

(6) $\neg P[A]\top$, 0 [5, $\neg\wedge$]	(7) $\neg O[A](B\rightarrow C)$, 0 [5, $\neg\wedge$]
(8) $O[A]\neg\top$, 0 [6, $\neg P$]	(9) $P[A]\neg(B\rightarrow C)$, 0 [7, $\neg O$]
(10) $\neg O[A]\bot$, 0 [4, $\neg\vee$]	(11) $0r_A1$ [9, P]
(12) $\neg P[A]\bot$, 0 [4, $\neg\vee$]	(13) $\neg(B\rightarrow C)$, 1 [9, P]
(14) $P[A]\neg\bot$, 0 [10, $\neg O$]	(15) B, 1 [13, $\neg\rightarrow$]
(16) $0r_A1$ [14, P]	(17) $\neg C$, 1 [13, $\neg\rightarrow$]
(18) $\neg\bot$, 1 [14, P]	(19) $0r_{A\wedge B}1$ [11, 15, Tα2]
(20) $\neg\top$, 1 [8, 16, O]	↙ ↘

(21) * [20]	(22) $O[A\wedge B]\bot\vee P[A\wedge B]\bot$, 0	(23) $P[A\wedge B]\top\wedge$ $O[A\wedge B]C$, 0 [2, $\vee$]
↙	↘	
(24) $O[A\wedge B]\bot$	(25) $P[A\wedge B]\bot$, 0 [22, $\vee$]	(26) $P[A\wedge B]\top$, 0 [23, $\wedge$]
(27) $\bot$, 1 [19, 24, O]	(28) $0r_{A\wedge B}2$ [25, P]	(29) $O[A\wedge B]C$, 0 [23, $\wedge$]
(30) * [27]	(31) $\bot$, 2 [25, P]	(32) C, 1 [19, 29, O]
	(33) * [31]	(34) * [17, 32]

DFL-α3. $\Diamond A\rightarrow O'[A]\top$ =
$\Diamond A\rightarrow(P[A]\top\wedge O[A]\top)$

(1) $\neg(\Diamond A\rightarrow(P[A]\top\wedge O[A]\top))$, 0
(2) $\Diamond A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(P[A]\top\wedge O[A]\top)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
↙ ↘

(4) $\neg P[A]\top$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(5) $\neg O[A]\top$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(6) $O[A]\neg\top$, 0 [4, $\neg P$]	(7) $P[A]\neg\top$, 0 [5, $\neg O$]
(8) A, 1 [2, $\Diamond$]	(9) $0r_A1$ [7, P]
(10) $0r_A2$ [8, Tα3]	(11) $\neg\top$, 1 [7, P]
(12) $\neg\top$, 2 [6, 10, O]	(13) * [11]
(14) * [12]	

DFL-α4. (O′[A]⊤∧P′[A]B)→((P′[A]⊥∨O′[A](B→C))→(P′[A∧B]⊥∨O′[A∧B]C)) =
((P[A]⊤∧O[A]⊤)∧(O[A]⊥∨P[A]B))→(((O[A]⊥∨P[A]⊥)∨(P[A]⊤∧O[A](B→C)))→((O[A∧B]⊥∨P[A∧B]⊥)∨(P[A∧B]⊤∧O[A∧B]C)))
(1) ¬(((P[A]⊤∧O[A]⊤)∧(O[A]⊥∨P[A]B))→(((O[A]⊥∨P[A]⊥)∨(P[A]⊤∧O[A](B→C)))→((O[A∧B]⊥∨P[A∧B]⊥)∨(P[A∧B]⊤∧O[A∧B]C)))), 0

(2) ((P[A]⊤∧O[A]⊤)∧(O[A]⊥∨P[A]B)), 0 [1, ¬→]
(3) ¬(((O[A]⊥∨P[A]⊥)∨(P[A]⊤∧O[A](B→C)))→((O[A∧B]⊥∨P[A∧B]⊥)∨(P[A∧B]⊤∧O[A∧B]C))), 0 [1, ¬→]
(4) P[A]⊤∧O[A]⊤, 0 [2, ∧]
(5) O[A]⊥∨P[A]B, 0 [2, ∧]
(6) ((O[A]⊥∨P[A]⊥)∨(P[A]⊤∧O[A](B→C))), 0 [3, ¬→]
(7) ¬((O[A∧B]⊥∨P[A∧B]⊥)
∨(P[A∧B]⊤∧O[A∧B]C)), 0 [3, ¬→]
(8) P[A]⊤, 0 [4, ∧]
(9) O[A]⊤, 0 [4, ∧]
(10) ¬(O[A∧B]⊥∨P[A∧B]⊥), 0 [7, ¬∨]
(11) ¬(P[A∧B]⊤∧O[A∧B]C), 0 [7, ¬∨]
(12) ¬O[A∧B]⊥, 0 [10, ¬∨]
(13) ¬P[A∧B]⊥, 0 [10, ¬∨]

↙ ↘

(14) O[A]⊥, 0 [5, ∨]		(15) P[A]B, 0 [5, ∨]	
(16) 0r_A1 [8, P]		(17) P[A∧B]¬⊥, 0 [12, ¬O]	
(18) ⊤, 1 [8, P]			
(19) ⊥, 1 [14, 16, O]		↙	↘
(20) * [19]	(21) O[A]⊥∨P[A]⊥, 0	(22) P[A]⊤∧O[A](B→C), 0 [6, ∨]	
↙	↘	(23) P[A]⊤, 0 [22, ∧]	
(24)O[A]⊥,0	(25) P[A]⊥, 0 [21, ∨]	(26) O[A](B→C), 0 [22, ∧]	
(27) 0r_A1 [8]	(28) 0r_A1	↙	↘
(29) ⊤, 1 [8]	(30) ⊥, 1	(31) ¬P[A∧B]⊤, 0	(32) ¬O[A∧B]C,0 [11,¬∧]
(33) ⊥, 1	(34) * [30]	(35) O[A∧B]¬⊤, 0	(36) P[A∧B]¬C,0 [32,¬O]
(37) * [33]		(38) 0$r_{A\wedge B}$1 [17, P]	(39) 0r_A1 [15, P]
		(40) ¬⊥, 1 [17, P]	(41) B, 1 [15, P]
		(42) ¬⊤, 1 [35, 38]	(43) 0$r_{A\wedge B}$2 [36, P]
		(44) * [42]	(45) ¬C, 2 [36, P]
			(46) 0r_A2 [39, 41, 43, Tα4]
			(47) B, 2 [39, 41, 43, Tα4]
			(48) B→C, 2 [26, 46, O]
			(49) C, 2 [47, 48, MP]
			(50) * [45, 49]

Lewis system
Lw1. P′[C]A↔¬O′[C]¬A är bevisad ovan.
Lw2. O′[C](A∧B)↔(O′[C]A∧O′[C]B) =
(P[C]⊤∧O[C](A∧B))↔((P[C]⊤∧O[C]A)∧(P[C]⊤∧O[C]B))

Vänster till höger
(1) ¬((P[C]⊤∧O[C](A∧B))→((P[C]⊤∧O[C]A)∧(P[C]⊤∧O[C]B))), 0
(2) P[C]⊤∧O[C](A∧B), 0 [1, ¬→]
(3) ¬((P[C]⊤∧O[C]A)∧(P[C]⊤∧O[C]B)), 0 [1, ¬→]
(4) P[C]⊤, 0 [2, ∧]
(5) O[C](A∧B), 0 [2, ∧]
↙ ↘
(6) ¬(P[C]⊤∧O[C]A), 0 [3, ¬∧]   (7) ¬(P[C]⊤∧O[C]B), 0 [3, ¬∧]
↙ ↘ ↙ ↘
(8) ¬P[C]⊤, 0   (9) ¬O[C]A [6]   (10) ¬P[C]⊤, 0   (11) ¬O[C]B, 0 [7]
(12) *   (13) P[C]¬A, 0 [9]   (14) * [4, 10]   (15) P[C]¬B, 0 [11]
(16) $0r_C1$ [13, P]   (17) $0r_C1$ [15, P]
(18) ¬A, 1 [13, P]   (19) ¬B, 1 [15, P]
(20) A∧B, 1 [5, 16, O]   (21) A∧B, 1 [5, 17]
(22) A, 1 [20, ∧]   (23) A, 1 [21, ∧]
(24) B, 1 [20, ∧]   (25) B, 1 [21, ∧]
(26) * [18, 22]   (27) * [19, 25]

Höger till vänster
(1) ¬(((P[C]⊤∧O[C]A)∧(P[C]⊤∧O[C]B))→(P[C]⊤∧O[C](A∧B))), 0
(2) (P[C]⊤∧O[C]A)∧(P[C]⊤∧O[C]B), 0 [1, ¬→]
(3) ¬(P[C]⊤∧O[C](A∧B)), 0 [1, ¬→]
(4) P[C]⊤∧O[C]A, 0 [2, ∧]
(5) P[C]⊤∧O[C]B, 0 [2, ∧]
(6) P[C]⊤, 0 [4, ∧]
(7) O[C]A, 0 [4, ∧]
(8) P[C]⊤, 0 [5, ∧]
(9) O[C]B, 0 [5, ∧]
↙ ↘
(10) ¬P[C]⊤, 0 [3, ¬∧]   (11) ¬O[C](A∧B), 0 [3, ¬∧]
(12) * [6, 10]   (13) P[C]¬(A∧B), 0 [11, ¬O]
(14) $0r_C1$ [13, P]
(15) ¬(A∧B), 1 [13, P]
(16) A, 1 [7, 14, O]
(17) B, 1 [9, 14, O]
↙ ↘
(18) ¬A, 1 [15, ¬∧]   (19) ¬B, 1 [15, ¬∧]
(20) * [16, 18]   (21) * [17, 19]

Lw3. $O'[C]A \rightarrow P'[C]A$ är bevisad ovan i DFL.

Lw4. $O'[C]\top \rightarrow O'[C]C =$
$(P[C]\top \wedge O[C]\top) \rightarrow (P[C]\top \wedge O[C]C)$

(1) $\neg((P[C]\top \wedge O[C]\top) \rightarrow (P[C]\top \wedge O[C]C))$, 0
(2) $P[C]\top \wedge O[C]\top$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(P[C]\top \wedge O[C]C)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[C]\top$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $O[C]\top$, 0 [2, $\wedge$]
↙ ↘

(6) $\neg P[C]\top$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(7) $\neg O[C]C$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(8) * [4, 6]	(9) $P[C]\neg C$, 0 [7, $\neg O$]
	(10) $0r_C1$ [9, P]
	(11) $\neg C$, 1 [9, P]
	(12) C, 1 [10, Tα1]
	(13) * [11, 12]

Lw5. $O'[C]\top \rightarrow O'[B \vee C]\top =$
$(P[C]\top \wedge O[C]\top) \rightarrow (P[B \vee C]\top \wedge O[B \vee C]\top)$

(1) $\neg((P[C]\top \wedge O[C]\top) \rightarrow (P[B \vee C]\top \wedge O[B \vee C]\top))$, 0
(2) $P[C]\top \wedge O[C]\top$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(P[B \vee C]\top \wedge O[B \vee C]\top)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[C]\top$, 0 [1, $\wedge$]
(5) $O[C]\top$, 0 [1, $\wedge$]
↙ ↘

(6) $\neg P[B \vee C]\top$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(7) $\neg O[B \vee C]\top$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(8) $O[B \vee C]\neg\top$, 0 [6, $\neg P$]	(9) $P[B \vee C]\neg\top$, 0 [7, $\neg O$]
(10) $0r_C1$ [4, P]	(11) $0r_{B \vee C}1$ [9, P]
(12) $\top$, 1 [4, P]	(13) $\neg\top$, 1 [9, P]
↙ ↘	(14) * [13]

(15) $\neg(B \vee C)$, 1	(16) $B \vee C$, 1 [CUT]
(17) $\neg B$, 1 [15, $\neg\vee$]	(18) $0r_{B \vee C}2$ [16, Tα3]
(19) $\neg C$, 1 [15, $\neg\vee$]	(20) $\neg\top$, 2 [8, 18, O]
(21) C, 1 [10, Tα1]	(22) * [20]
(23) * [19, 21]	

Lw6. $(O'[B]A\land O'[C]A)\rightarrow O'[B\lor C]A =$
$((P[B]\top\land O[B]A)\land(P[C]\top\land O[C]A))\rightarrow(P[B\lor C]\top\land O[B\lor C]A)$

(1) $\neg(((P[B]\top\land O[B]A)\land(P[C]\top\land O[C]A))\rightarrow(P[B\lor C]\top\land O[B\lor C]A))$, 0
(2) $(P[B]\top\land O[B]A)\land(P[C]\top\land O[C]A)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(P[B\lor C]\top\land O[B\lor C]A)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[B]\top\land O[B]A$, 0 [2, $\land$]
(5) $P[C]\top\land O[C]A$, 0 [2, $\land$]
(6) $P[B]\top$, 0 [4, $\land$]
(7) $O[B]A$, 0 [4, $\land$]
(8) $P[C]\top$, 0 [5, $\land$]
(9) $O[C]A$, 0 [5, $\land$]
↙ ↘

(10) $\neg P[B\lor C]\top$, 0 [3, $\neg\land$]		(11) $\neg O[B\lor C]A$, 0 [3, $\neg\land$]	
(12) $O[B\lor C]\neg\top$, 0 [10, $\neg$P]		(13) $P[B\lor C]\neg A$, 0 [11, $\neg$O]	
(14) $0r_B1$ [6, P]		(15) $\Box(B\leftrightarrow((B\lor C)\land B))$, 0 [GA]	
(16) $\top$, 1 [6, P]		(17) $O[(B\lor C)\land B]A$, 0 [7, 15]	
(18) B, 1 [14, Tα1]		(19) $\Box(C\leftrightarrow((B\lor C)\land C))$, 0 [GA]	
↙	↘	(20) $O[(B\lor C)\land C]A$, 0 [9, 19]	
(21) $\neg(B\lor C)$, 1	(22) $B\lor C$, 1 [CUT]	(23) $0r_{B\lor C}1$ [13, P]	
(24) $\neg B$, 1 [21, $\neg\lor$]	(25) $0r_{B\lor C}2$ [Tα3]	(26) $\neg A$, 1 [13, P]	
(27) $\neg C$, 1 [21, $\neg\lor$]	(28) $\neg\top$, 2 [12, 25]	(29) $B\lor C$, 1 [23, Tα1]	
(30) * [18, 24]	(31) * [28]	↙	↘
		(32) $\neg B$, 1 [CUT]	(33) B, 1 [CUT]
	↙	↘	(34) $0r_{(B\lor C)\land B}1$
	(35) B, 1 [29]	(36) C, 1 [29]	(37) A, 1 [17, 34]
	(38) * [32, 35]	(39) $0r_{(B\lor C)\land C}1$	(40) * [26, 37]
		(41) A, 1 [20, 39, O]	
		(42) * [26, 41]	

Nod (39) ovan härleds från nod (23) och nod (36), och nod (34) från (23) och (33), båda med Tα2. I beviset av satsen Lw7 nedan har vi använt regeln (Global Assumption (GA)) (se Rönnedal 2009b) och adderat $\Box\neg C\rightarrow\Box((B\lor C)\leftrightarrow B)$ vid nod (8). $\Box\neg C\rightarrow\Box((B\lor C)\leftrightarrow B)$ är ett teorem i TG, vilket enkelt kan bevisas med hjälp av en semantisk tablå. Nod (20) och (21) härleds från nod (4) med hjälp av ($\lor$), och nod (24) härleds från nod (15) med hjälp av (Tα3). Nod (25) och nod (29) följer från nod (21) med hjälp av (P). Nod (28) fås från nod (20) och nod (24) med O-regeln. Nod (16) härleds från nod (13) med hjälp av ($\neg$P). Nod (26) följer från nod (10) och nod (16) med hjälp av DR2, och nod (27) från nod (7) och nod (10) med hjälp av DR1.

Vid nod (24) i beviset av Lemma 2 nedan, har vi också använt regeln (Global Assumption) och adderat $\Box(((B\lor C)\land B)\leftrightarrow B)$. Även denna sats kan lätt bevisas i TG. Nod (13) och (14) fås från nod (4) med hjälp av ($\lor$).

Lw7. $(P'[C]\bot\wedge O'[B\vee C]A)\to O'[B]A =$
$((O[C]\bot\vee P[C]\bot)\wedge(P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]A))\to(P[B]\top\wedge O[B]A)$

(1) $\neg(((O[C]\bot\vee P[C]\bot)\wedge(P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]A))\to(P[B]\top\wedge O[B]A))$, 0
(2) $(O[C]\bot\vee P[C]\bot)\wedge(P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]A)$, 0 [1, $\neg\to$]
(3) $\neg(P[B]\top\wedge O[B]A)$, 0 [1, $\neg\to$]
(4) $O[C]\bot\vee P[C]\bot$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]A$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $P[B\vee C]\top$, 0 [5, $\wedge$]
(7) $O[B\vee C]A$, 0 [5, $\wedge$]
(8) $\Box\neg C\to\Box((B\vee C)\leftrightarrow B)$, 0 [GA, Lemma]
↙ ↘

(9) $\neg\Box\neg C$, 0 [8, $\to$]		(10) $\Box((B\vee C)\leftrightarrow B)$, 0 [8, $\to$]	
(11) $\Diamond\neg\neg C$, 0 [9, $\neg\Box$]		↙	↘
(12) $\neg\neg C$, 1 [11, $\Diamond$]		(13) $\neg P[B]\top$, 0	(14) $\neg O[B]A$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(15) C, 1 [12, $\neg\neg$]		(16) $O[B]\neg\top$, 0	(17) $P[B]\neg A$, 0 [14, $\neg O$]
↙	↘	(18) $0r_{B\vee C}1$ [6, P]	(19) $0r_B1$ [17, P]
(20) $O[C]\bot$,0	(21) $P[C]\bot$, 0	(22) $\top$, 1 [6, P]	(23) $\neg A$, 1 [17, P]
(24) $0r_C2$ $T\alpha3$	(25) $0r_C2$	(26) $O[B\vee C]\neg\top$, 0	(27) $O[B]A$, 0
(28) $\bot$, 2	(29) $\bot$, 2	(30) $\neg\top$, 1 [18, 26]	(31) A, 1 [19, 27, O]
(32) * [28]	(33) * [29]	(34) * [30]	(35) * [23, 31]

I beviset av Lw8 kommer vi att använda flera hjälpsatser och ett par härledda regler.
Lemma 1 (L1). $O'[B\vee C]A\to O'[B\vee C]\top$.
Lemma 2 (L2). $(P'[B\vee C]B\wedge O'[B\vee C]A)\to O'[B]\top$.
Lemma 3 (L3). $(O'[B\vee C]\top\wedge P'[B\vee C]B)\to((P'[B\vee C]\bot\vee O'[B\vee C](B\to A))$
$\to(O'[(B\vee C)\wedge B]\top\to O'[(B\vee C)\wedge B]A))$.
Lemma 4 (L4). $O'[B\vee C]A\to(P'[B\vee C]\bot\vee O'[B\vee C](B\to A))$.
Lemma 5 (L5). $\Box(B\leftrightarrow((B\vee C)\wedge B))$.

Härledd regel (DR10)	Härledd regel (DR11)
$\Box(A\leftrightarrow B)$, i	$\Box(A\leftrightarrow B)$, i
$O'[A]C$, i	$O'[B]C$, i
↓	↓
$O'[B]C$, i	$O'[A]C$, i

Vi skall bevisa Lemma 2. Övriga bevis är relativt enkla och kan lämnas till läsaren. Notera att Lemma 3 kan härledas från följande sats: $(O'[A]\top\wedge P'[A]B)\to((P'[A]\bot\vee O'[A](B\to C))\to(P'[A\wedge B]\bot\vee O'[A\wedge B]C))$ som kan bevisas med hjälp av relevanta definitioner och tablåregeln $T\alpha4$.

Lemma 2 $(P'[B\lor C]B\land O'[B\lor C]A)\to O'[B]\top$ =
$((O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B)\land(P[B\lor C]\top\land O[B\lor C]A))\to(P[B]\top\land O[B]\top)$

$(1)\ \neg(((O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B)\land(P[B\lor C]\top\land O[B\lor C]A))\to(P[B]\top\land O[B]\top)),\ 0$

$(2)\ (O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B)\land(P[B\lor C]\top\land O[B\lor C]A),\ 0\ [1,\neg\to]$

$(3)\ \neg(P[B]\top\land O[B]\top),\ 0\ [1,\neg\to]$

$(4)\ O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B,\ 0\ [2,\land]$

$(5)\ P[B\lor C]\top\land O[B\lor C]A,\ 0\ [2,\land]$

$(6)\ P[B\lor C]\top,\ 0\ [5,\land]$

$(7)\ O[B\lor C]A,\ 0\ [5,\land]$

↙ ↘

$(8)\ \neg P[B]\top,\ 0\ [3,\neg\land]$		$(9)\ \neg O[B]\top,\ 0\ [3,\neg\land]$
$(10)\ O[B]\neg\top,\ 0\ [8,\neg P]$		$(11)\ P[B]\neg\top,\ 0\ [9,\neg O]$
↙	↘	$(12)\ 0r_B1\ [11, P]$
$(13)\ O[B\lor C]\bot,\ 0$	$(14)\ P[B\lor C]B, 0\ [4,\lor]$	$(15)\ \neg\top,\ 1\ [11, P]$
$(16)\ 0r_{B\lor C}1\ [6]$	$(17)\ 0r_{B\lor C}1\ [14, P]$	(18) * [15]
$(19)\ \top,\ 1\ [6, P]$	$(20)\ B,\ 1\ [14, P]$	
$(21)\ \bot,\ 1\ [13, 16]$	$(22)\ 0r_{(B\lor C)\land B}1\ [17, 20, T\alpha 2]$	
(23) * [21]	$(24)\ \Box(((B\lor C)\land B)\leftrightarrow B),\ 0$ [GA, Lemma]	
	$(25)\ O[(B\lor C)\land B]\neg\top,\ 0$ [10, 24 DR2]	
	$(26)\ \neg\top,\ 1\ [22, 25, O]$	
	(27) * [26]	

Lw8. $(P'[B\lor C]B\land O'[B\lor C]A)\to O'[B]A$

$(1)\ \neg((P'[B\lor C]B\land O'[B\lor C]A)\to O'[B]A),\ 0$

$(2)\ P'[B\lor C]B\land O'[B\lor C]A,\ 0\ [1,\neg\to]$

$(3)\ \neg O'[B]A,\ 0\ [1,\neg\to]$

$(4)\ P'[B\lor C]B\ [2,\land]$

$(5)\ O'[B\lor C]A,\ 0\ [2,\land]$

$(6)\ O'[B\lor C]\top,\ 0$ [5, GA, L1, MP]

$(7)\ O'[B]\top,\ 0$ [2, GA, L2, MP]

$(8)\ (O'[B\lor C]\top\land P'[B\lor C]B)\to((P'[B\lor C]\bot\lor O'[B\lor C](B\to A))\to(O'[(B\lor C)\land B]\top\to O'[(B\lor C)\land B]A)),\ 0$ [GA, L3]

↙ ↘

$(9)\ \neg(O'[B\lor C]\top\land P'[B\lor C]B),\ 0$		$(10)\ (P'[B\lor C]\bot\lor O'[B\lor C](B\to A))\to (O'[(B\lor C)\land B]\top\to O'[(B\lor C)\land B]A),\ 0$
↙	↘	
(11) $\neg O'[B\lor C]\top, 0$	(12) $\neg P'[B\lor C]B, 0$	$(13)\ P'[B\lor C]\bot\lor O'[B\lor C](B\to A),\ 0$ [L4]
(15) * [6, 11]	(16) * [4, 12]	$(14)\ O'[(B\lor C)\land B]\top\to O'[(B\lor C)\land B]A, 0$
		$(17)\ \Box(B\leftrightarrow((B\lor C)\land B)),\ 0$ [GA, L5]
		$(18)\ O'[(B\lor C)\land B]\top,\ 0$ [7, 17, DR10]
		$(19)\ O'[(B\lor C)\land B]A,\ 0$ [14, 18, MP]
		$(20)\ O'[B]A,\ 0$ [17, 19, DR11]
		(21) * [3, 20]

Lw9. O′[⊤]⊤ = P[⊤]⊤∧O[⊤]⊤

(1) ¬(P[⊤]⊤∧O[⊤]⊤), 0
↙ ↘
(2) ¬P[⊤]⊤, 0 [1, ¬∧]   (3) ¬O[⊤]⊤, 0 [1, ¬∧]
(4) O[⊤]¬⊤, 0[2, ¬P]   (5) P[⊤]¬⊤, 0 [3, ¬O]
↙ ↘   (6) $0r_{\top}1$ [5, P]
(7) ¬⊤, 0   (8) ⊤, 0 [CUT]   (9) ¬⊤, 1 [5, P]
(10) * [7]   (11) $0r_{\top}1$ [8, Tα3]   (12) * [9]
(13) ¬⊤, 1 [4, 11, O]
(14) * [13]

Lw10. A→O′[A]⊤ = A→(P[A]⊤∧O[A]⊤)

(1) ¬(A→(P[A]⊤∧O[A]⊤)), 0
(2) A, 0 [1, ¬→]
(3) ¬(P[A]⊤∧O[A]⊤), 0 [1, ¬→]
↙ ↘
(4) ¬P[A]⊤, 0 [3, ¬∧]   (5) ¬O[A]⊤, 0 [3, ¬∧]
(6) O[A]¬⊤, 0 [4, ¬P]   (7) P[A]¬⊤, 0 [5, ¬O]
(8) $0r_{A}1$ [2, Tα3]   (9) $0r_{A}1$ [7, P]
(10) ¬⊤, 1 [6, 8, O]   (11) ¬⊤, 1 [7, P]
(12) * [10]   (13) * [11]

Lw11. O′[A]⊤→P′[P′[A]⊥]⊥ =
(P[A]⊤∧O[A]⊤)→(O[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥∨P[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥)

(1) ¬((P[A]⊤∧O[A]⊤)→(O[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥∨P[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥)), 0
(2) P[A]⊤∧O[A]⊤, 0 [1, ¬→]
(3) ¬(O[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥∨P[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥)), 0 [1, ¬→]
(4) P[A]⊤, 0 [1, ∧]
(5) O[A]⊤, 0 [1, ∧]
(6) ¬O[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥, 0 [3, ¬∨]
(7) ¬P[O[A]⊥∨P[A]⊥]⊥, 0 [3, ¬∨]
(8) P[O[A]⊥∨P[A]⊥]¬⊥, 0 [6, ¬O]
(9) $0r_{O[A]\bot\vee P[A]\bot}1$ [8, P]
(10) ¬⊥, 1 [8, P]
(11) O[A]⊥∨P[A]⊥, 1 [9, Tα1]
↙ ↘
(12) O[A]⊥, 1 [11, ∨]   (13) P[A]⊥, 1 [11, ∨]
(14) $0r_{A}2$ [4, P]   (15) $1r_{A}2$ [13, P]
(16) ⊤, 2 [4, P]   (17) ⊥, 2 [13, P]
(18) $1r_{A}2$ [14, Ta6]   (19) * [17]
(20) ⊥, 2 [12, 18, O]
(21) * [20]

Lw12. $O'[B]A \to P'[\neg O'[B]A]\bot =$
$(P[B]\top \wedge O[B]A) \to (O[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot \vee P[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot)$
(1) $\neg((P[B]\top \wedge O[B]A) \to (O[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot \vee P[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot)), 0$
(2) $P[B]\top \wedge O[B]A, 0\ [1, \neg\to]$
(3) $\neg(O[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot \vee$
$P[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot), 0\ [1, \neg\to]$
(4) $P[B]\top, 0\ [2, \wedge]$
(5) $O[B]A, 0\ [2, \wedge]$
(6) $\neg O[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot, 0\ [3, \neg\vee]$
(7) $\neg P[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\bot, 0\ [3, \neg\vee]$
(8) $P[\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)]\neg\bot, 0\ [6, \neg O]$
(9) $0r_{\neg(P[B]\top \wedge O[B]A)}1\ [8, P]$
(10) $\neg\bot, 1\ [8, P]$
(11) $\neg(P[B]\top \wedge O[B]A), 1\ [9, T\alpha 1]$
↙ ↘

(12) $\neg P[B]\top, 1\ [11, \neg\wedge]$	(13) $\neg O[B]A, 1\ [11, \neg\wedge]$
(14) $O[B]\neg\top, 1\ [12, \neg P]$	(15) $P[B]\neg A, 1\ [13, \neg O]$
(16) $0r_B2\ [4, P]$	(17) $1r_B2\ [15, P]$
(18) $\top, 2\ [4, P]$	(19) $\neg A, 2\ [15, P]$
(20) $1r_B2\ [16, Ta6]$	(21) $0r_B2\ [17, Ta6]$
(22) $\neg\top, 2\ [14, 20, O]$	(23) $A, 2\ [5, 21, O]$
(24) * [22]	(25) * [19, 23]

Lw13. $P'[B]A \to P'[\neg P'[B]A]\bot =$
$(O[B]\bot \vee P[B]A) \to (O[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\bot \vee P[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\bot)$
(1) $\neg((O[B]\bot \vee P[B]A) \to (O[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\bot \vee P[\neg(O[B]\bot \vee$
$P[B]A)]\bot)), 0$
(2) $O[B]\bot \vee P[B]A, 0\ [1, \neg\to]$
(3) $\neg(O[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\bot \vee$
$P[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\bot), 0\ [1, \neg\to]$
(4) $\neg O[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\bot, 0\ [3, \neg\vee]$
(5) $\neg P[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\bot, 0\ [3, \neg\vee]$
(6) $P[\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)]\neg\bot, 0\ [4, \neg O]$
(7) $0r_{\neg(O[B]\bot \vee P[B]A)}1\ [6, P]$
(8) $\neg\bot, 1\ [6, P]$
(9) $\neg(O[B]\bot \vee P[B]A), 1\ [7, T\alpha 1]$
(10) $\neg O[B]\bot, 1\ [9, \neg\vee]$
(11) $\neg P[B]A, 1\ [9, \neg\vee]$
(12) $P[B]\neg\bot, 1\ [10, \neg O]$
(13) $O[B]\neg A, 1\ [11, \neg P]$
↙ ↘

(14) $O[B]\bot, 0\ [2, \vee]$	(15) $P[B]A, 0\ [2, \vee]$
(16) $1r_B2\ [12, P]$	(17) $0r_B2\ [15, P]$
(18) $\neg\bot, 2\ [12, P]$	(19) $A, 2\ [15, P]$
(20) $0r_B2\ [16, Ta6]$	(21) $1r_B2\ [17, Ta6]$
(22) $\bot, 2\ [14, 20, O]$	(23) $\neg A, 2\ [13, 21, O]$
(24) * [22]	(25) * [19, 23]

Van Fraassens system
vF1. $P'[B]A \leftrightarrow \neg O'[B]\neg A$
vF2 (= DFL-2). $O'[B](A \rightarrow C) \rightarrow (O'[B]A \rightarrow O'[B]C)$
vF3 (= Lw3). $O'[B]A \rightarrow P'[B]A$
vF4. $O'[A]B \rightarrow O'[A](B \wedge A)$
vF5. $O'[A \vee B]\neg B \rightarrow (O'[B \vee C]\neg C \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$
vF6. $P'[A \vee B]A \rightarrow (O'[B \vee C]\neg C \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$
vF7. $O'[A \vee B]\neg B \rightarrow (P'[B \vee C]B \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$

Innan vi bevisar van Fraassens axiom skall vi gå igenom G1-G7. Vi använder sedan dessa teorem som hjälpsatser i våra bevis. Bevisen av vF5-vF7 är kanske de svåraste och kräver ett ganska stort mått av kreativitet.

G1. $O[A]\bot \rightarrow \Box\neg A$
(1) $\neg(O[A]\bot \rightarrow \Box\neg A)$, 0
(2) $O[A]\bot$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg\Box\neg A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $\Diamond\neg\neg A$, 0 [3, $\neg\Box$]
(5) $\neg\neg A$, 1 [4, $\Diamond$]
(6) A, 1 [5, $\neg\neg$]
(7) $0r_A2$ [6, Tα3]
(8) $\bot$, 2 [2, 7, O]
(9) * [8]

G2. $P[A]B \rightarrow (P[A \wedge B]C \rightarrow P[A](B \wedge C))$
(1) $\neg(P[A]B \rightarrow (P[A \wedge B]C \rightarrow P[A](B \wedge C)))$, 0
(2) $P[A]B$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(P[A \wedge B]C \rightarrow P[A](B \wedge C))$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[A \wedge B]C$, 0 [3, $\neg\rightarrow$]
(5) $\neg P[A](B \wedge C)$, 0 [3, $\neg\rightarrow$]
(6) $O[A]\neg(B \wedge C)$, 0 [5, $\neg$P]
(7) $0r_A1$ [2, P]
(8) B, 1 [2, P]
(9) $0r_{A \wedge B}2$ [4, P]
(10) C, 2 [4, P]
(11) $0r_A2$ [7, 8, 9, Tα4]
(12) B, 2 [7, 8, 9, Tα4]
(13) $\neg(B \wedge C)$, 2 [6, 11, O]
↙ ↘
(14) $\neg B$, 2 [13, $\neg\wedge$] (15) $\neg C$, 2 [13, $\neg\wedge$]
(16) * [12, 14] (17) * [10, 15]

G3. $O[A\vee B]\neg B\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg B$

(1) $\neg(O[A\vee B]\neg B\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg B), 0$
(2) $O[A\vee B]\neg B, 0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg O[A\vee B\vee C]\neg B, 0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[A\vee B\vee C]\neg\neg B, 0$ [3, $\neg O$]
(5) $0r_{A\vee B\vee C}1$ [4, P]
(6) $\neg\neg B, 1$ [4, P]
(7) $A\vee B\vee C, 1$ [5, $T\alpha 1$]

↙	↘
(8) $\neg(A\vee B), 1$ [CUT]	(9) $A\vee B, 1$ [CUT]
(10) $\neg A, 1$ [8, $\neg\vee$]	(11) $0r_{(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B)}1$ [5, 9, $T\alpha 2$]
(12) $\neg B, 1$ [8, $\neg\vee$]	(13) $\Box(((A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B))\leftrightarrow(A\vee B)), 0$ [GA]
(14) * [6, 12]	(15) $O[(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B)]\neg B, 0$ [2, 13, DR2]
	(16) $\neg B, 1$ [11, 15, O]
	(17) * [6, 16]

Innan vi bevisar G4 skall vi bevisa ett antal hjälpsatser (Lemma 1-4) och slutledningsregler (HR1 och HR2).

Lemma 1 (L1) $\Box(B\rightarrow C)\rightarrow(P[A]B\rightarrow P[A]C)$

(1) $\neg(\Box(B\rightarrow C)\rightarrow(P[A]B\rightarrow P[A]C)), 0$
(2) $\Box(B\rightarrow C), 0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(P[A]B\rightarrow P[A]C), 0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[A]B, 0$ [3, $\neg\rightarrow$]
(5) $\neg P[A]C, 0$ [3, $\neg\rightarrow$]
(6) $O[A]\neg C, 0$ [5, $\neg P$]
(7) $0r_A1$ [4, P]
(8) $B, 1$ [4, P]
(9) $\neg C, 1$ [6, 7, O]
(10) $B\rightarrow C, 1$ [2, $\Box$]
(11) $C, 1$ [8, 10, MP]
(12) * [9, 11]

Lemma 2 (L2) $\Box(B\rightarrow C)\rightarrow(O[A]B\rightarrow O[A]C)$

(1) $\neg(\Box(B\rightarrow C)\rightarrow(O[A]B\rightarrow O[A]C)), 0$
(2) $\Box(B\rightarrow C), 0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(O[A]B\rightarrow O[A]C), 0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $O[A]B, 0$ [3, $\neg\rightarrow$]
(5) $\neg O[A]C, 0$ [3, $\neg\rightarrow$]
(6) $P[A]\neg C, 0$ [5, $\neg O$]
(7) $0r_A1$ [6, P]
(8) $\neg C, 1$ [6, P]
(9) $B, 1$ [4, 7, O]
(10) $B\rightarrow C, 1$ [2, $\Box$]
(11) $C, 1$ [9, 10, MP]
(12) * [8, 11]

Härledd regel (HR1)

$\Box(B \rightarrow C)$, i

$P[A]B$, i

↓

$P[A]C$, i

Härledd regel (HR2)

$\Box(B \rightarrow C)$, i

$O[A]B$, i

↓

$O[A]C$, i

Bevis av HR1

(1) $\Box(B \rightarrow C)$, i
(2) $P[A]B$, i
(3) $\Box(B \rightarrow C) \rightarrow (P[A]B \rightarrow P[A]C)$, i [GA, Lemma 1]
(4) $P[A]B \rightarrow P[A]C$, i [1, 3, MP]
(5) $P[A]C$, i [2, 4, MP]

Bevis av HR2

(1) $\Box(B \rightarrow C)$, i
(2) $O[A]B$, i
(3) $\Box(B \rightarrow C) \rightarrow (O[A]B \rightarrow O[A]C)$, i [GA, Lemma 2]
(4) $O[A]B \rightarrow O[A]C$, i [1, 3, MP]
(5) $O[A]C$, i [2, 4, MP]

Lemma 3 (L3). $\Box(\neg\neg C \rightarrow (B \vee C))$.
Lemma 4 (L4). $\Box(\neg B \rightarrow ((B \vee C) \rightarrow \neg B))$.
Lemma 5 (L5). $P[A \vee B \vee C](B \vee C) \rightarrow (O[A \vee B \vee C]((B \vee C) \rightarrow \neg B) \rightarrow O[(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)]\neg B)$. Enkelt!

Lemma 6 (L6). $\Box(((A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow (B \vee C))$

$\neg\Box(((A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow (B \vee C))$, 0
$\Diamond\neg(((A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow (B \vee C))$, 0
$\neg(((A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow (B \vee C))$, 1

↙ ↘

$(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)$, 1
$\neg(B \vee C)$, 1
$A \vee B \vee C$, 1
$B \vee C$, 1
$\neg B$, 1
$\neg C$, 1
↙ ↘
B, 1 C, 1
* *

$\neg((A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C))$, 1
$B \vee C$, 1
↙ ↘

$\neg(A \vee B \vee C)$, 1
$\neg A$, 1
$\neg B$, 1
$\neg C$, 1
↙ ↘
B, 1 C, 1
* *

$\neg(B \vee C)$, 1
$\neg B$, 1
$\neg C$, 1
↙ ↘
B, 1 C, 1
* *

Vi kan nu visa att G4, $(O[A\vee B]\neg B\wedge P[B\vee C]B)\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg C$, är ett teorem i TG.

(1) $\neg((O[A\vee B]\neg B\wedge P[B\vee C]B)\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg C)$, 0
(2) $O[A\vee B]\neg B\wedge P[B\vee C]B$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg O[A\vee B\vee C]\neg C$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $O[A\vee B]\neg B$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $P[B\vee C]B$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $P[A\vee B\vee C]\neg\neg C$, 0 [3, $\neg O$]
(7) $\Box(\neg\neg C\rightarrow(B\vee C))$, 0 [GA, Lemma 3]
(8) $P[A\vee B\vee C](B\vee C)$, 0 [6, 7, HR1]
(9) $O[A\vee B]\neg B\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg B$, 0 [GA, G3]
(10) $O[A\vee B\vee C]\neg B$, 0 [4, 9, MP]
(11) $\Box(\neg B\rightarrow((B\vee C)\rightarrow\neg B))$, 0 [GA, Lemma 4]
(12) $O[A\vee B\vee C]((B\vee C)\rightarrow\neg B)$, 0 [10, 11, HR2]
(13) $P[A\vee B\vee C](B\vee C)\rightarrow(O[A\vee B\vee C]((B\vee C)\rightarrow\neg B)$
$\rightarrow O[(A\vee B\vee C)\wedge(B\vee C)]\neg B)$, 0 [GA, Lemma 5]
(14) $O[A\vee B\vee C]((B\vee C)\rightarrow\neg B)$
$\rightarrow O[(A\vee B\vee C)\wedge(B\vee C)]\neg B$, 0 [8, 13, MP]
(15) $O[(A\vee B\vee C)\wedge(B\vee C)]\neg B$, 0 [12, 14, MP]
(16) $\Box(((A\vee B\vee C)\wedge(B\vee C))\leftrightarrow(B\vee C))$, 0 [GA, Lemma 6]
(17) $O[B\vee C]\neg B$, 0 [15, 16, DR1]
(18) $0r_{B\vee C}1$ [5, P]
(19) B, 1 [5, P]
(20) $\neg B$, 1 [17, 18, O]
(21) * [19, 20]

G5. $P[A\vee B]A\rightarrow P[A\vee B\vee C]\top$

(1) $\neg(P[A\vee B]A\rightarrow P[A\vee B\vee C]\top)$, 0
(2) $P[A\vee B]A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg P[A\vee B\vee C]\top$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $O[A\vee B\vee C]\neg\top$, 0 [3, $\neg P$]
(5) $0r_{A\vee B}1$ [2, P]
(6) A, 1 [2, P]
↙ ↘

(7) $\neg(A\vee B\vee C)$, 1 [CUT]	(8) $A\vee B\vee C$, 1 [CUT]
(9) $\neg A$, 1 [7, $\neg\vee$]	(10) $0r_{A\vee B\vee C}2$ [8, Tα3]
(11) * [6, 9]	(12) $\neg\top$, 2 [4, 10, O]
	(13) * [12]

G6. $P[A\vee B]A\rightarrow P[A\vee C]\top$

(1) $\neg(P[A\vee B]A\rightarrow P[A\vee C]\top)$, 0
(2) $P[A\vee B]A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg P[A\vee C]\top$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $O[A\vee C]\neg\top$, 0 [3, $\neg$P]
(5) $0r_{A\vee B}1$ [2, P]
(6) A, 1 [2, P]
↙ ↘

(7) $\neg(A\vee C)$, 1 [CUT]	(8) $A\vee C$, 1 [CUT]
(9) $\neg A$, 1 [7, $\neg\vee$]	(10) $0r_{A\vee C}2$ [8, Tα3]
(11) * [6, 9]	(12) $\neg\top$, 2 [4, 10, O]
	(13) * [12]

G7. $(P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow P[A\vee B]A$

(1) $\neg((P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow P[A\vee B]A)$, 0
(2) $P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg P[A\vee B]A$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[A\vee B]\top$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $O[A\vee B]\neg B$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $O[A\vee B]\neg A$, 0 [3, $\neg$P]
(7) $0r_{A\vee B}1$ [4, P]
(8) $\top$, 1 [4, P]
(9) $\neg B$, 1 [5, 7, O]
(10) $\neg A$, 1 [6, 7, O]
(11) $A\vee B$, 1 [7, Tα1]
↙ ↘

(12) A, 1 [11, $\vee$]	(13) B, 1 [11, $\vee$]
(14) * [10, 12]	(15) * [9, 13]

vF1 – 3 har redan bevisats ovan.

vF4. $O'[A]B\rightarrow O'[A](B\wedge A) = (P[A]\top\wedge O[A]B)\rightarrow(P[A]\top\wedge O[A](B\wedge A))$

(1) $\neg((P[A]\top\wedge O[A]B)\rightarrow(P[A]\top\wedge O[A](B\wedge A)))$, 0
(2) $P[A]\top\wedge O[A]B$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(P[A]\top\wedge O[A](B\wedge A))$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[A]\top$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $O[A]B$, 0 [2, $\wedge$]
↙ ↘

(6) $\neg P[A]\top$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(7) $\neg O[A](B\wedge A)$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(8) * [4, 6]	(9) $P[A]\neg(B\wedge A)$, 0 [7, $\neg$O]
	(10) $0r_{A}1$ [9, P]
	(11) $\neg(B\wedge A)$, 1 [9, P]
	(12) A, 1 [10, Tα1]
	(13) B, 1 [5, 10, O]
	↙ ↘

(14) $\neg B$, 1 [11, $\neg\wedge$]	(15) $\neg A$, 1 [11, $\neg\wedge$]
(16) * [13, 14]	(17) * [12, 15]

vF5. $O'[A\vee B]\neg B\rightarrow(O'[B\vee C]\neg C\rightarrow O'[A\vee C]\neg C)$
$O'[A\vee B]\neg B\rightarrow(O'[B\vee C]\neg C\rightarrow O'[A\vee C]\neg C) =$
$(P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow((P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]\neg C)\rightarrow(P[A\vee C]\top\wedge O[A\vee C]\neg C))$

När vi har bevisat vF6 (nedan) kan vi enkelt bevisa vF5 med hjälp av följande lemma. Detaljerna lämnas till läsaren.

$O'[A\vee B]\neg B\rightarrow P'[A\vee B]A =$
$(P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)$

(1) $\neg((P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A))$, 0
(2) $P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $P[A\vee B]\top$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $O[A\vee B]\neg B$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $\neg O[A\vee B]\bot$, 0 [3, $\neg\vee$]
(7) $\neg P[A\vee B]A$, 0 [3, $\neg\vee$]
(8) $O[A\vee B]\neg A$, 0 [7, $\neg P$]
(9) $0r_{A\vee B}1$ [4, P]
(10) $\top$, 1 [4, P]
(11) $\neg B$, 1 [5, 9, O]
(12) $\neg A$, 1 [8, 9, O]
(13) $A\vee B$, 1 [9, $T\alpha 1$]
↙ ↘
(14) A, 1 [13, $\vee$] (15) B, 1 [13, $\vee$]
(16) * [12, 14] (17) * [11, 15]

vF6. $P'[A\vee B]A\rightarrow(O'[B\vee C]\neg C\rightarrow O'[A\vee C]\neg C) =$
$(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\rightarrow((P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]\neg C)\rightarrow(P[A\vee C]\top\wedge O[A\vee C]\neg C))$

Beviset av vF6 är långt. Så jag har delat upp det i flera delbevis. I de semantiska tablåerna använder jag ett antal hjälpsatser; L1 = Lemma 1, L2 = Lemma 2 etc. Alla dessa hjälpsatser kan relativt enkelt bevisas i TG.

(1) $\neg((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\rightarrow((P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]\neg C)\rightarrow(P[A\vee C]\top\wedge O[A\vee C]\neg C)))$, 0
(2) $O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A$, 0
(3) $\neg((P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]\neg C)\rightarrow(P[A\vee C]\top\wedge O[A\vee C]\neg C))$, 0
(4) $P[B\vee C]\top\wedge O[B\vee C]\neg C$, 0
(5) $\neg(P[A\vee C]\top\wedge O[A\vee C]\neg C)$, 0
(6) $P[B\vee C]\top$, 0
(7) $O[B\vee C]\neg C$, 0
↙ ↘
(8) $O[A\vee B]\bot$, 0 (9) $P[A\vee B]A$, 0
T1 T2

T1

$O[A\vee B]\bot, 0$
$O[A\vee B]\bot\rightarrow\Box\neg(A\vee B), 0$ [GA, L1]
$\Box\neg(A\vee B), 0$ [MP]
$\Box\neg(A\vee B)\rightarrow\Box((B\vee C)\leftrightarrow(A\vee C)), 0$ [GA, L2]
$\Box((B\vee C)\leftrightarrow(A\vee C)), 0$ [MP]
$P[A\vee C]\top, 0$ [6, sats omedelbart ovan, DR3]
↙ ↘
$\neg P[A\vee C]\top, 0$ $\neg O[A\vee C]\neg C, 0$ [5, $\neg\wedge$]
* $O[A\vee C]\neg C, 0$ [7, DR1]
*

T2

$P[A\vee B]A, 0$
$P[A\vee B\vee C](A\vee B)\rightarrow(P[(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B)](A\vee\neg B)\rightarrow P[A\vee B\vee C]((A\vee B)$
$\wedge(A\vee\neg B))), 0$ [GA, G2]
$O[A\vee B\vee C](A\vee B\vee C), 0$ [GA, L3]
$O[B\vee C]\neg C\rightarrow O[A\vee B\vee C]\neg C, 0$ [GA, G3]
↙ ↘
$\neg O[B\vee C]\neg C, 0$ $O[A\vee B\vee C]\neg C, 0$
* [7] $(O[A\vee B\vee C](A\vee B\vee C)\wedge$
$O[A\vee B\vee C]\neg C)\rightarrow O[A\vee B\vee C](A\vee B)$ [GA, L4]
↙ ↘
$\neg(O[A\vee B\vee C](A\vee B\vee C)\wedge O[A\vee B\vee C]\neg C), 0$ $O[A\vee B\vee C](A\vee B), 0$
$P[A\vee B]A\rightarrow$
↙ ↘ $P[A\vee B\vee C]\top, 0$ [GA, G5]
$\neg O[A\vee B\vee C](A\vee B\vee C), 0$ $\neg O[A\vee B\vee C]\neg C, 0$ ↙↘
* *
$\neg P[A\vee B]A, 0$ $P[A\vee B\vee C]\top, 0$
* T3

T3

$(O[A\vee B\vee C](A\vee B)\wedge P[A\vee B\vee C]\top)\rightarrow P[A\vee B\vee C](A\vee B), 0$ [GA, L5]
↙ ↘
$\neg(O[A\vee B\vee C](A\vee B)\wedge P[A\vee B\vee C]\top), 0$ $P[A\vee B\vee C](A\vee B), 0$
$P[A\vee B]A\rightarrow$
↙ ↘ $P[A\vee B](A\vee\neg B), 0$ [GA, L6]
$\neg O[A\vee B\vee C](A\vee B), 0$ $\neg P[A\vee B\vee C]\top, 0$ $P[A\vee B](A\vee\neg B), 0$ [MP]
* * T4

T4

$\Box((A\lor B)\leftrightarrow((A\lor B\lor C)\land(A\lor B)))$, 0 [GA, L7]
$P[(A\lor B\lor C)\land(A\lor B)](A\lor\neg B)$, 0 [DR3]
$P[(A\lor B\lor C)\land(A\lor B)](A\lor\neg B)\to P[A\lor B\lor C]((A\lor B)\land(A\lor\neg B))$, 0 [MP]
$P[A\lor B\lor C]((A\lor B)\land(A\lor\neg B))$, 0 [MP]
$\Box(A\leftrightarrow((A\lor B)\land(A\lor\neg B)))$, 0 [GA, L8]
$P[A\lor B\lor C]A$, 0
$P[A\lor B\lor C]A\to P[A\lor B\lor C](A\lor C)$, 0 [GA, L9]
$P[A\lor B\lor C](A\lor C)$, 0 [MP]
$P[A\lor B\lor C](A\lor C)\to(O[A\lor B\lor C]((A\lor C)\to\neg C)\to O[(A\lor B\lor C)\land(A\lor C)]\neg C)$, 0 [GA, L10]
$O[A\lor B\lor C]((A\lor C)\to\neg C)\to O[(A\lor B\lor C)\land(A\lor C)]\neg C$, 0 [MP]
$O[A\lor B\lor C]\neg C\to O[A\lor B\lor C]((A\lor C)\to\neg C)$, 0 [GA, L11]
$O[A\lor B\lor C]((A\lor C)\to\neg C)$, 0 [MP]
↙ ↘

$\neg O[A\lor B\lor C]((A\lor C)\to\neg C)$, 0
*

$O[(A\lor B\lor C)\land(A\lor C)]\neg C$, 0
$\Box((A\lor C)\leftrightarrow((A\lor B\lor C)\land(A\lor C)))$, 0 [GA, L12]
$O[A\lor C]\neg C$, 0 [DR2]
$P[A\lor B]A\to P[A\lor C]\top$, 0 [G6]
$P[A\lor C]\top$, 0 [MP]
↙ ↘

$\neg P[A\lor C]\top$, 0 [5]
*

$\neg O[A\lor C]\neg C$, 0 [5]
*

I det här skedet är alla grenar i trädet slutna. Alltså är hela trädet slutet. Det följer att vF6 är ett teorem i TG.

vF7. $O'[A\lor B]\neg B\to(P'[B\lor C]B\to O'[A\lor C]\neg C) =$
$(P[A\lor B]\top\land O[A\lor B]\neg B)\to((O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B)\to$
$(P[A\lor C]\top\land O[A\lor C]\neg C))$
I beviset av vF7 använder vi flera olika hjälpsatser. Alla dessa är teorem i systemet TG. De är sammanfattade nedan. Bevisen lämnas till läsaren.
Lemma 1 (L1) $O[B\lor C]\bot\to\Box\neg(B\lor C)$
Lemma 2 (L2) $\Box\neg(B\lor C)\to\Box((A\lor B)\leftrightarrow(A\lor C))$
Lemma 3 (L3) $\Box\neg(B\lor C)\to\Box\neg C$
Lemma 4 (L4) $\Box\neg C\to O[A\lor C]\neg C$
Lemma 6 (L6) $O[A\lor B\lor C](A\lor B\lor C)$
Lemma 7 (L7) $(O[A\lor B\lor C](A\lor B\lor C)\land O[A\lor B\lor C]\neg B)\to O[A\lor B\lor C](A\lor C)$
Lemma 8 (L8) $(O[A\lor B\lor C](A\lor C)\land P[A\lor B\lor C]\top)\to P[A\lor B\lor C](A\lor C)$

Lemma 9 (L9) P[A∨B∨C](A∨C)→(O[A∨B∨C]((A∨C)→¬C)→O[(A∨B∨C)∧(A∨C)]¬C)
Lemma 10 (L10) O[A∨B∨C]¬C→O[A∨B∨C]((A∨C)→¬C)
Lemma 11 (L11) □(((A∨B∨C)∧(A∨C))↔(A∨C))
Lemma 12 (L12) (P[A∨B]⊤∧O[A∨B]¬B)→P[A∨B]A

(1) ¬((P[A∨B]⊤∧O[A∨B]¬B)→((O[B∨C]⊥∨P[B∨C]B)→(P[A∨C]⊤∧ O[A∨C]¬C))), 0
(2) P[A∨B]⊤∧O[A∨B]¬B, 0 [1, ¬→]
(3) ¬((O[B∨C]⊥∨P[B∨C]B)→ (P[A∨C]⊤∧O[A∨C]¬C)), 0 [1, ¬→]
(4) O[B∨C]⊥∨P[B∨C]B, 0 [3, ¬→]
(5) ¬(P[A∨C]⊤∧O[A∨C]¬C), 0 [3, ¬→]
(6) P[A∨B]⊤, 0 [2, ∧]
(7) O[A∨B]¬B, 0 [2, ∧]
↙ ↘

(7) O[B∨C]⊥, 0 [4, ∨]
(9) □¬(B∨C), 0 [7, L1 etc]
(11) □¬(B∨C)→ □((A∨B)↔(A∨C)), 0 [GA]
(14) □((A∨B)↔(A∨C)), 0
(16) P[A∨C]⊤, 0 [6, 14, DR3]
(18) □¬(B∨C)→□¬C, 0 [GA]
(20) □¬C, 0 [9, 18, MP]
(22) □¬C→O[A∨C]¬C, 0 [GA]
(23) O[A∨C]¬C, 0 [20, 22, MP]
↙ ↘

(25) ¬P[A∨C]⊤, 0
(28) * [16, 25]

(26) ¬O[A∨C]¬C, 0
(29) * [23, 26]

(8) P[B∨C]B, 0 [4, ∨]
(10) O[A∨B∨C]¬C, 0 [7, 8, GA, G4 etc]
(12) O[A∨B∨C]¬B, 0 [7, GA, G3 etc]
(13) O[A∨B∨C](A∨B∨C), 0 [GA]
(15) O[A∨B∨C](A∨C), 0 [12, 13, L7 etc]
(17) P[A∨B∨C]⊤, 0 [GA, G5, 8 etc]
(19) P[A∨B∨C](A∨C), 0 [GA, 15, 17]
(21) P[A∨B∨C](A∨C)→ (O[A∨B∨C]((A∨C)→¬C) →O[(A∨B∨C)∧(A∨C)]¬C), 0 [GA]
(24) O[A∨B∨C]¬C→ O[A∨B∨C]((A∨C)→¬C), 0 [GA]
(27) O[A∨B∨C]((A∨C)→¬C), 0
(30) (O[A∨B∨C]((A∨C)→¬C)→ O[(A∨B∨C)∧(A∨C)]¬C), 0 [19, 21]
(31) O[(A∨B∨C)∧(A∨C)]¬C, 0 [27, 30]
(32) □(((A∨B∨C)∧(A∨C))↔(A∨C)), 0
(33) O[A∨C]¬C, 0 [31, 32, DR1]
(34) P[A∨B]A, 0 [GA, 6, 7, L12 etc]
(35) P[A∨C]⊤, 0 [GA, 34, G6 etc]
↙ ↘

(36) ¬P[A∨C]⊤, 0
(38) * [35, 36]

(37)¬O[A∨C]¬C, 0
(39) * [33, 37]

Nod (9) följer från nod (7) med hjälp av regeln Global Assumption, Lemma 1 etc. Nod (11) fås från Global Assumption, (11) = Lemma 2. Nod (13) är härledbar med hjälp av Global Assumption, (13) = Lemma 6. Notera att Lemma 6 är en instans av O[A]A. Nod (15) följer från nod (12) och nod (13) med hjälp av Global Assumption, Lemma 7 etc. Nod (18) fås från Global Assumption, (18) = Lemma 3. Nod (22) följer med hjälp av Global Assumption, (22) = Lemma 4. Nod (25) och nod (26) är härledbara från nod (5) med hjälp av $(\neg\wedge)$. Nod (19) följer från nod (15) och nod (17) med hjälp av Global Assumption, Lemma 8 etc. Nod (21) fås från Global Assumption, (21) = Lemma 9. Notera att (21) är en instans av $P[A]B \rightarrow (O[A](B \rightarrow C) \rightarrow O[A \wedge B]C)$. Nod (27) följer från nod (10) och nod (24) med hjälp av Modus Ponens (MP). Nod (32) är härledbar från Global Assumption, (32) = Lemma 11. Nod (36) och nod (37) följer från nod (5) med hjälp av $(\neg\wedge)$. Och nod (34) följer från nod (6) och nod (7) med hjälp av Global Assumption, Lemma 12 etc.

Vi är nu färdiga med vårt bevis: alla satser i Danielssons, Hanssons, van Fraassens, Lewis, von Kutscheras och Åqvists system som vi har nämnt ovan är teorem i tablåsystemet TG!

Referenser

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, nr. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i *Hintikka, J.* (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Chisholm, R. M. (1963). Contrary-to-duty Imperatives and Deontic Logic. *Analysis* 24, ss. 33–36.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J. (red.). (1999). *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Danielsson, S. (1968). *Preference and Obligation: Studies in the Logic of Ethics*. Filosofiska föreningen, Uppsala.

Fitting, M. (1972). Tableau methods of proof for modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13, ss. 237–247.

Fitting, M. (1983). *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*. D. Reidel, Dordrecht.

Fitting, M. (1999). Introduction. I *D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J.* (red.). (1999), ss. 1–43.

Gabbay, D. & Guenthner F. (red.). (1984). *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 2, D. Reidel.

Gabbay, D. & Guenthner, F. (red.). (2002). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 8, D. Reidel.

Gabbay, D., Horty, J., Parent, X., van der Meyden, E. & van der Torre, L. (red.). (2013). *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*. College Publications.

Hansson, B. (1969). An Analysis of Some Deontic Logics. *Noûs* 3, ss. 373–398. Tryckt på nytt i Hilpinen, R. (red.). (1971), ss. 121–147.

Hilpinen, R. (red.). (1971). *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hilpinen, R. (red.). (1981). *New Studies in Deontic Logic Norms, Actions, and the Foundation of Ethics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press, Oxford.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.

Kripke, S. A. (1959). A Completeness Theorem in Modal Logic. *The Journal of Symbolic Logic* 24, ss. 1–14.

Lenk, H., & Berkemann J. (red.). (1974). *Normenlogik: Grundprobleme der deontischen Logik*. UTB, 414, Verlag Dokumentation, Pullach (near München).

Lewis, D. (1973). *Counterfactuals*. Basil Blackwell, Oxford.

Lewis, D. (1974). Semantic analysis for dyadic deontic logic. I *Stenlund, S.* (red.). (1974), ss. 1–14.

Mally, E. (1926). *Grundgesetze des Sollens Elemente der Logik des Willens*. Leuschner and Lubensky, Graz.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.

Prior, A. (1954). The Paradoxes of Derived Obligation. *Mind* 63, ss. 64–65.

Rescher, N. (1958). An axiom system for deontic logic. *Philosophical studies*, Vol. 9, ss. 24–30.

Rönnedal, D. (2009). Counterfactuals and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 1, ss. 71–91.

Rönnedal, D. (2009b). Dyadic Deontic Logic and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 3–4, ss. 221–252.

Rönnedal, D. (2010). *An Introduction to Deontic Logic*. Charleston, SC.

Rönnedal, D. (2012). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*, Department of Philosophy, Stockholm University.

Smullyan, R. M. (1963). A unifying Principle in Quantificational Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 49, 6, ss. 828–832.

Smullyan, R. M. (1965). Analytic Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic* 30, ss. 123–139.

Smullyan, R. M. (1966). Trees and Nest Structures. *Journal of Symbolic Logic* 31, ss. 303–321.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg, Springer-Verlag.
Stenlund, S. (red.). (1974). *Logical Theory and Semantical Analysis*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
van Fraassen, C. (1972). The Logic of Conditional Obligation. *Journal of Philosophical Logic* 1, ss. 417–438.
van Fraassen, C. (1973). Values and the Heart's Command. *The Journal of Philosophy* LXX, ss. 5–19.
von Kutschera, F. (1974). Normative Präferenzen und bedingte Gebote. I *Lenk, H., & Berkemann J.* (red.). (1974), ss. 137–165.
von Wright, G. H. (1951). Deontic Logic. *Mind* 60, ss. 1–15.
von Wright, G. H. (1964). A new system of deontic logic. *Danish yearbook of philosophy*, Vol. 1, ss. 173–182.
Åqvist, L. (1971). Revised foundations for imperative-epistemic and interrogative logic. *Theoria*, Vol. 37, Nr. 1, ss. 33–73.
Åqvist, L. (1973). Modal Logic with Subjunctive Conditionals and Dispositional Predicates. *Journal of Philosophical Logic*. Vol. 2, Nr. 1, ss. 1–76.
Åqvist, L. (1984). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner F.* (red.). (1984), ss. 605–714.
Åqvist, L. (1987). *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*. Bibliopolis, Naples.
Åqvist, L. (2002). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner, F.* (red.). (2002), ss. 147–264.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Bimodal Tidslogik
med Monotemporala Ramar

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. I tidigare arbeten har jag diskuterat hur tidslogiken kan betraktas som en form av multimodal logik. I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan beskrivas som en bimodal logik, ett slags modallogik som endast innehåller *två* typer av temporala operatorer. Den semantik jag använder är baserad på monotemporala ramar. En monotemporal ram är en relationell struktur som endast innehåller *en* primitiv tillgänglighetsrelation, nämligen relationen *tidigare än* / *senare än*. Jag utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.

1. Introduktion

Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. I tidigare arbeten har jag diskuterat hur tidslogiken kan betraktas som en form av multimodal logik (Rönnedal (2014)). I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan beskrivas som en bimodal logik, ett slags modallogik som endast innehåller *två* typer av temporala operatorer. Den semantik jag använder är baserad på monotemporala ramar. En monotemporal ram är en relationell struktur som endast innehåller *en* primitiv tillgänglighetsrelation, nämligen relationen *tidigare än* / *senare än*. Jag

Filosofiska Notiser, Årgång 2, Nr. 2, September 2015, 53-76

utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.[1]

Uppsatsen är indelad i fem avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax. I avsnitt 3 går jag igenom den semantik som är gemensam för alla system, jag definierar ett antal grundläggande begrepp och undersöker några möjliga egenskaper hos tiden. Avsnitt 4 handlar om bevisteori. Jag beskriver ett antal tablåregler och visar hur dessa kan användas för att generera en mängd semantiska tablåsystem. Avsnitt 5 innehåller sundhets- och fullständighetsteorem.

2. Syntax

Språket TS2 består av följande alfabet och satser.

2.1. Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion),
$\vee$ (disjunktion), $\supset$ (materiell implikation) och $\equiv$ (materiell ekvivalens).
De temporala operatorerna G, F, H och P.
Parenteser) och (.

2.2. Satser

Språket TS2 består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor.

Varje satsbokstav är en (atomär) sats.
Om A och B är satser, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ och $(A \equiv B)$ satser.
Om B är en sats, så är också $\neg B$, GB, FB, HB och PB satser.
Ingenting annat är en sats.

2.3 Definitioner

$[G]B = (B \wedge GB)$, $\langle F\rangle B = (B \vee FB)$, $[H]B = (B \wedge HB)$ och $\langle P\rangle B = (B \vee PA)$.

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Den grekiska bokstaven Σ står för en mängd satser och den tomma

---

[1] För mer information om tidslogik, se t.ex. Barringer, Fisher, Gabbay & Gough (2000), Burgess (1984), Finger, Gabbay & Reynolds (2002), Galton (1999), Goldblatt (1992), Kröger & Merz (2008), McArthur (1976), Needham (1975), Prior (1957), (1967), Rescher & Urquhart (1971), van Benthem (1983), Øhrstrøm & Hasle (1995).

mängden betecknas ∅. De satslogiska konnektiven är välkända från satslogiken. Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår. Falsum kan introduceras genom en definition på vanligt vis. Övriga satser i språket läses på samma sätt som i Rönnedal (2014), nämligen på följande sätt.

GB: Det kommer alltid att vara fallet att B.
FB: Det kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
HB: Det har alltid varit fallet att B.
PB: Det har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.
[G]B: Det är och kommer alltid att vara fallet att B.
⟨F⟩B: Det är eller kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
[H]B: Det är och har alltid varit fallet att B.
⟨P⟩B: Det är eller har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.

3. Semantik

Tanken bakom den semantik som beskrivs i det här avsnittet är densamma som i Rönnedal (2014). Vi skall emellertid införa några nya begrepp.

3.1. Grundläggande termer

Ramar. I Rönnedal (2014) beskrev vi en temporal ram, F, som en relationell struktur <T, <, >, ≤, ≥>, där T är en icke-tom mängd av tidpunkter, och <, >, ≤, ≥ är fyra dyadiska tillgänglighetsrelationer mellan tidpunkterna i T (< är en delmängd av T × T, etc.). Den intuitiva tolkningen av tillgänglighetsrelationerna är som följer.

$t_1 < t_2$: t_1 inträffar före/tidigare än t_2
$t_2 > t_1$: t_2 inträffar efter/senare än t_1
$t_1 \leq t_2$: t_1 inträffar samtidigt med eller före/tidigare än t_2
$t_2 \geq t_1$: t_2 inträffar samtidigt med eller efter/senare än t_1

Låt oss kalla en temporal ram av detta slag en *multi*-temporal ram. Vi kan emellertid också använda oss av *bi*-temporala och *mono*-temporala ramar. En bitemporal ram innehåller *två* (primitiva) tillgänglighetsrelationer (t.ex. < och >), och en monotemporal ram innehåller *en* (primitiv) tillgänlighetsrelation (t.ex. <).

Givet vår informella läsning av de olika relationerna är det rimligt att anta att de kan definieras i termer av varandra. I en bitemporal ram som innehåller $<$ och $>$ som primitiva relationer kan t.ex. $\leq$ och $\geq$ definieras på följande sätt.

$$\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$$
$$\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$$

Dvs. t inträffar samtidigt med eller före t′ om och endast om (omm) t är identisk med t′ eller t inträffar före t′. Och t inträffar samtidigt med eller efter t′ omm t är identisk med t′ eller t inträffar efter t′. Dessa definitioner är rimliga om vi antar att det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt. Alternativt kan vi använda följande definitioner: $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$; eller $\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$.

I en monotemporal ram som innehåller $<$ som primitiv relation kan t.ex. övriga relationer definieras på följande sätt.

$$\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$$
$$\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$$
$$\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$$

Dvs. $\leq$ och $\geq$ definieras på samma sätt som i vårt bitemporala exempel, och $>$ definieras i termer av $<$. t′ inträffar efter t omm t inträffar före t′. De här definitionerna är rimliga om vi antar att relationen *inträffar efter* är konversen till (eller konversen av) relationen *inträffar tidigare än*, och det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt. Här följer ett par alternativa definitioner: $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$, $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$; eller $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$, $\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$.

Om $>$ är konversen till $<$, så kan $t_1 < t_2$ (och även $t_2 > t_1$) läsas på två sätt: (i) t_1 inträffar före/tidigare än t_2, eller (ii) t_2 inträffar efter/senare än t_1. Båda är lika korrekta. På samma sätt gäller det att om $\geq$ är konversen till $\leq$, så kan $t_1 \leq t_2$ (och även $t_2 \geq t_1$) läsas på två sätt: (i) t_1 inträffar samtidigt med eller före/tidigare än t_2, eller (ii) t_2 inträffar samtidigt med eller efter/senare än t_1.

Semantiken för tidslogiken har ofta utvecklats med hjälp av monotemporala ramar. Vi skall i den här uppsatsen använda monotemporala ramar med formen $<T, <>$, där $<$ är den enda primitiva tillgänglighetsrelationen. Det här innebär att vi så att säga implicit gör vissa antaganden, t.ex. att $>$ är konversen till <. Det följer att bl.a. satserna $A \supset HFA$ och $A \supset GPA$ blir automatiskt giltiga. I bitemporala och multitemporala system måste vi inkludera vissa tablåregler för att kunna bevisa dessa (se avsnitt 4.3).

Modeller. Uttrycket ”temporal modell” definieras på samma sätt som i Rönnedal (2014), dvs. en temporal modell, M, är en struktur <F, V>, där F är en temporal ram och V är en värdering eller tolkningsfunktion, som tilldelar sanningsvärden T (sann) eller F (falsk) till varje satsbokstav vid varje tidpunkt i T.

I den här uppsatsen använder vi emellertid monotemporala ramar istället för multitemporala ramar, som vi redan har nämnt. Vi kan därför tala om en modell, M, direkt som en struktur <T, <, V>, där tillgänglighetsrelationen och T tolkas som i en monotemporal ram. ”**F**” representerar en klass av ramar, ”**M**” en klass av modeller.

3.2. Sanningsvillkor

$\Vdash_{M,\,t}$ B står för att B är sann vid tidpunkt t i modell M. Sanningsvillkoren för atomära satser och de satslogiska konnektiven är desamma som i Rönnedal (2014). Eftersom [G], ⟨F⟩, [H] och ⟨P⟩ är definierade i den här uppsatsen behöver vi inte ange några primitiva sanningsvillkor för satser där dessa operatorer har störst räckvidd. Här följer övriga villkor.

$\Vdash_{M,\,t}$ GB	omm	det för varje tidpunkt t′ i T sådan att t < t′ gäller att $\Vdash_{M,\,t'}$ B.
$\Vdash_{M,\,t}$ FB	omm	det finns någon tidpunkt t′ i T sådan att t < t′ och $\Vdash_{M,\,t'}$ B.
$\Vdash_{M,\,t}$ HB	omm	det för varje tidpunkt t′ i T sådan att t′ < t gäller att $\Vdash_{M,\,t'}$ B.
$\Vdash_{M,\,t}$ PB	omm	det finns någon tidpunkt t′ i T sådan att t′ < t och $\Vdash_{M,\,t'}$ B.

Notera att dessa sanningsvillkor är ekvivalenta med motsvarande villkor i Rönnedal (2014), givet att > definieras som konversen till <.

3.3. Övriga semantiska begrepp

Övriga semantiska begrepp, som satisfierbarhet, giltighet, logisk konsekvens osv. definieras precis som i Rönnedal (2014).

3.4. Villkor på temporala ramar

Vi skall nämna några olika villkor som kan användas för att karaktärisera olika temporala ramar. I Rönnedal (2014) delade vi in dessa villkor i två olika grupper. I den här uppsatsen behöver vi inte nämna den andra gruppen, som handlade om hur de olika tillgänglighetsrelationerna förhåller sig till varandra. För i den här uppsatsen studerar vi endast monotemporala ramar. Vi antar så att säga implicit att övriga temporala relationer kan definieras i termer av relationen *tidigare än* / *senare än* på så sätt som beskrevs ovan. Det här innebär bl.a. att < är konversen till > (och tvärt om), att < är inkluderad i ≤, att > är inkluderad i ≥, och att både ≤ och ≥ är reflexiva. Tabell 1 sammanfattar några möjliga egenskaper hos relationen *tidigare än* / *senare än*. I Rönnedal (2014) säger jag mer om innebörden av dessa villkor.

Villkor	Formalisering av villkor
	Reflexivitet
C-<T	$\forall tt < t$
	Ändlöshet bakåt
C-<PD	$\forall t\exists t't' < t$
	Ändlöshet framåt
C-<FD	$\forall t\exists t't < t'$
	Symmetri
C-<B	$\forall t\forall t'(t < t' \supset t' < t)$
	Transitivitet
C-<4	$\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$
	Täthet
C-<DE	$\forall t\forall t'(t < t' \supset \exists t''(t < t'' \wedge t'' < t'))$
	Gränser bakåt
C-<LB	$\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$
	Gränser framåt
C-<UB	$\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$
	Jämförbarhet
C-<C	$\forall t\forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$
	Konvergens bakåt
C-<PC	$\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$
	Konvergens framåt
C-<FC	$\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$

Tabell 1

3.6. Klasser av ramar och deras logik

De villkor på ramar vi har tagit upp i avsnitt 3.4 kan användas för att tala om olika klasser av ramar på samma sätt som i Rönnedal (2014). **F**($C_1, \ldots, C_n$) är klassen av alla ramar som uppfyller villkoren $C_1, \ldots, C_n$. Klassen av alla satser i TS2 som är giltiga i en klass av ramar **F**, S(**F**), kallas **F**'s logik eller det logiska systemet som är baserat på **F**. S(**F**) = $\{A \in \text{TS2} : \Vdash_{\mathbf{F}} A\}$. Genom att införa vissa villkor på våra ramar kan vi alltså, som vanligt, definiera en mängd logiska system. Dessa system är semantiskt karaktäriserade. I nästa sektion skall vi utveckla ett antal semantiska tablåsystem som svarar mot dessa.

4. Bevisteori

Vi skall nu undersöka ett antal semantiska tablåsystem som bl.a. kan användas för att avgöra om en sats är logiskt sann, logiskt falsk eller logiskt kontingent, om en mängd satser är konsistent eller inkonsistent och om ett argument är giltigt eller ogiltigt.[2]

Grundläggande begrepp, såsom träd, semantisk tablå, gren, öppen och sluten gren, teorem, bevis osv. definieras på vanligt sätt, se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 131, eller Priest (2008). $\vdash_S$ B innebär att B är ett teorem i systemet S; och **Σ** $\vdash_S$ B innebär att B är härledbar från **Σ** i S.

Vi börjar med att gå igenom ett antal semantiska tablåregler. Därefter skall vi se hur dessa kan användas för att skapa en mängd semantiska tablåsystem. Slutligen nämner jag ett antal teorem som kan bevisas i våra system.

4.1. Tablåregler

Det finns tre olika typer av tablåregler: satslogiska regler, (grundläggande) temporala regler och (temporala) tillgänglighetsregler. De två första ingår i alla tablåsystem. Olika tablåsystem innehåller emellertid olika tillgänglighetsregler. Genom att lägga till tillgänglighetsregler kan vi skapa starkare system. Dessa regler svarar mot de semantiska villkor som vi diskuterade i sektion 3.4. Eftersom vi använder monotemporala ramar (och modeller) i den här uppsatsen behöver vi inte införa några tablåregler som svarar mot olika

---

[2] Evert Beth, se Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463, tycks ha varit den förste logiker som utvecklade ett semantiskt tablåsystem. Enligt Smullyan (1968) s. 3 kommer idén ursprungligen från Gerhard Gentzen (se Gentzen (1935) och Gentzen (1935b)). För mer information om semantiska tablåsystem, se t.ex. D'Agostino et al. (1999), Fitting & Mendelsohn (1998), Garson (2006), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), (2012b) och Smullyan (1968).

relationer mellan olika tillgänglighetsrelationer på samma sätt som i Rönnedal (2014).

4.1.1. Satslogiska regler

Vi använder samma satslogiska regler som vanligt. (För mer information, se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 132, eller nästan vilken introduktion till semantiska tablåer som helst, t.ex. Priest (2008)).

4.1.2. Grundläggande temporala regler

G	H	F	P
GA, i	HA, i	FA, i	PA, i
i < j	j < i	↓	↓
↓	↓	i < j	j < i
A, j	A, j	A, j	A, j
		där j är ny	där j är ny
¬G	¬H	¬F	¬P
¬GA, i	¬HA, i	¬FA, i	¬PA, i
↓	↓	↓	↓
F¬A, i	P¬A, i	G¬A, i	H¬A, i

Tabell 2

Speciella regler för [G], [H], ⟨F⟩ och ⟨P⟩ behövs inte i systemen i den här uppsatsen, eftersom [G], [H], ⟨F⟩ och ⟨P⟩ introduceras genom definitioner i det språk vi använder här.

Id(I)	Id(II)	Id
A(i)	A(i)	…i…
i = j	j = i	↓
↓	↓	i = i
A(j)	A(j)	

Tabell 3

De grundläggande identitetsreglerna är redundanta i system som inte innehåller några övriga ”identitetsregler” (regler som innehåller identitetstecknet).

4.1.3. Temporala tillgänglighetsregler

T-<PD	T-<FD	T-<T	T-<B	T-<4
...j...	...j…	…j…	i < j	i < j
↓	↓	↓	↓	j < k
k < j	j < k	j < j	j < i	↓
där k är ny	där k är ny			i < k

Tabell 4

Som vi noterade i Rönnedal (2014) är reglerna T-<T och T-<B inte särskilt plausibla rent intuitivt, eftersom de svarar mot villkoren att relationen *tidigare än* / *senare än* är reflexiv respektive symmetrisk. Anledningen till att jag har inkluderat dessa är att om tiden är cirkulär och transitiv, så följer det att den också är reflexiv och symmetrisk. Är tiden linjär, är de emellertid inte rimliga.

T-<DE	T-<LB	T-<UB
i < j	j < i	i < j
↓	k < i	i < k
i < k	↓	↓
k < j	l < j	j < l
där k är ny	l < k	k < l
	där l är ny	där l är ny

Tabell 5

T-<C	T-<PC	T-<FC
…i, j…	j < i	i < j
↙↓↘	k < i	i < k
i < j i = j j < i	↙↓↘	↙↓↘
	j < k j = k k < j	j < k j = k k < j

Tabell 6

4.2. Tablåsystem

Ett tablåsystem är en mängd tablåregler. Ett (normalt) temporalt tablåsystem inkluderar alla satslogiska regler och alla grundläggande temporala regler. Det minimala (normala) temporala tablåsystemet kallas ”T”. Genom att lägga till någon delmängd av de tillgänglighetsregler som introducerades i avsnitt 4.1.3 får vi en extension av T. Vi använder följande konventioner för att benämna olika system. ”$TT_1 \ldots T_n$”, där $T_1, \ldots, T_n$ är en lista (möjligtvis tom) på temporala tillgänglighetsregler, står för ett temporalt tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna T_1, …, och T_n. ”Redundanta” bokstäver i namnen utelämnas. T<4<PC (T4PC) är t.ex. ett namn på det temporala tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna T-<4 (4) och T-<PC (PC).

Om S är ett tablåsystem, så är S’s logik, eller den logik som är baserad på S, $L(S) = \{A \in TS2 : \vdash_S A\}$, dvs. mängden av alla satser i TS2 som kan bevisas i S. L(4PC) är t.ex. mängden av alla satser som kan bevisas i systemet T<4<PC (4PC), dvs. i det tablåsystem som innehåller alla grundläggande temporala regler och tillgänglighetsreglerna T-<4 (4) och T-<PC (PC).

4.3. Exempel på teorem

Det här avsnittet innehåller några teorem i olika temporala tablåsystem. Bevisen är ofta relativt enkla och i de flesta fall utelämnade. (Vill man lära sig att handskas med systemen i den här uppsatsen kan det vara en bra övning att bevisa alla satser i det här avsnittet.)

$GA \equiv \neg F \neg A$	$\neg GA \equiv F \neg A$	$G \neg A \equiv \neg FA$
$FA \equiv \neg G \neg A$	$\neg FA \equiv G \neg A$	$F \neg A \equiv \neg GA$
$[G]A \equiv \neg \langle F \rangle \neg A$	$\neg [G]A \equiv \langle F \rangle \neg A$	$[G] \neg A \equiv \neg \langle F \rangle A$
$\langle F \rangle A \equiv \neg [G] \neg A$	$\neg \langle F \rangle A \equiv [G] \neg A$	$\langle F \rangle \neg A \equiv \neg [G]A$
$HA \equiv \neg P \neg A$	$\neg HA \equiv P \neg A$	$H \neg A \equiv \neg PA$
$PA \equiv \neg H \neg A$	$\neg PA \equiv H \neg A$	$P \neg A \equiv \neg HA$
$[H]A \equiv \neg \langle P \rangle \neg A$	$\neg [H]A \equiv \langle P \rangle \neg A$	$[H] \neg A \equiv \neg \langle P \rangle A$
$\langle P \rangle A \equiv \neg [H] \neg A$	$\neg \langle P \rangle A \equiv [H] \neg A$	$\langle P \rangle \neg A \equiv \neg [H]A$

Tabell 7

Teorem 1. Alla satser i tabell 7 är teorem i alla system i den här uppsatsen.

Bevis. Enkelt! ■

I den här uppsatsen har vi introducerat [G], ⟨F⟩, [H] och ⟨P⟩ med hjälp av definitioner. Det innebär att det är sant per definition att $[G]B \equiv (B \wedge GB)$, $\langle F \rangle B \equiv (B \vee FB)$, $[H]B \equiv (B \wedge HB)$ och $\langle P \rangle B \equiv (B \vee PA)$. I de multimodala system som beskrivs i Rönnedal (2014) måste emellertid dessa ekvivalenser bevisas. Låt mig illustrera med ett exempel. Om ett multimodalt tablåsystem S innehåller T-≤T, T-<≤I och T-≤<I, så är $[H]A \equiv (A \wedge HA)$ ett teorem i S. Men $[H]A \equiv (A \wedge HA)$ är inte ett teorem i alla multimodala system. För att

visa [H]A ⊃ (A ∧ HA) ”krävs” T-≤T och T-<≤I, och för att visa (A ∧ HA) ⊃ [H]A ”krävs” T-≤<I. Om systemet innehåller T-≤T, så kan vi bevisa [H]A ⊃ A. Om systemet innehåller T-<≤I, så kan vi bevisa [H]A ⊃ HA. T-≤T svarar mot det semantiska villkoret att ≤ är reflexiv, T-<≤I mot det semantiska villkoret att < är inkluderad i ≤, och T-≤<I mot det semantiska villkoret att t inträffar samtidigt med eller tidigare än t′ omm t och t′ är identiska eller t inträffar tidigare än t′. Det här är villkor som vi ”implicit” antar att alla system i den här uppsatsen uppfyller. (Jag utelämnar i regel ”T-”, och ibland också ”<”, i namnet på alla tablåregler och använder ”Id” som en förkortning av alla ”identitetsregler” i bevisen nedan.)

[H]A ⊃ (A ∧ HA)
(1) ¬([H]A ⊃ (A ∧ HA)), 0
(2) [H]A, 0 [1, ¬⊃]
(3) ¬(A ∧ HA), 0 [1, ¬⊃]
↙ ↘

(4) ¬A, 0 [3, ¬∧]	(5) ¬HA, 0 [3,¬∧]
(6) 0 ≤ 0 [1, ≤T]	(7) P¬A, 0 [5,¬H]
(8) A, 0 [2,6,[H]]	(9) 1 < 0 [7, P]
(10) * [4, 8]	(11) ¬A, 1 [7, P]
	(12) 1 ≤ 0 [11, <≤I]
	(13) A, 1 [2, 12]
	(14) * [11, 13]

(A ∧ HA) ⊃ [H]A
(1) ¬((A ∧ HA) ⊃ [H]A), 0
(2) A ∧ HA, 0 [1, ¬⊃]
(3) ¬[H]A, 0 [1, ¬⊃]
(4) A, 0 [2, ∧]
(5) HA, 0 [2, ∧]
(6) ⟨P⟩¬A, 0 [3, ¬[H]]
(7) 1 ≤ 0 [6, ⟨P⟩]
(8) ¬A, 1 [6, ⟨P⟩]
↙ ↘

(9) 1 = 0 [7, ≤<I]	(10) 1 < 0 [7, ≤<I]
(11) A, 1 [4, 9, Id]	(12) A, 1 [5,10,H]
(13) * [8, 11]	(14) * [8, 12]

Alla satser av följande form kan bevisas i alla tablåsystem i den här uppsatsen: A ⊃ HFA, PGA ⊃ A, A ⊃ GPA, FHA ⊃ A. Detta gäller dock inte i alla multimodala system som beskrivs i Rönnedal (2014). För att bevisa A ⊃ HFA, PGA ⊃ A behöver vi T-<>C, och för att bevisa A ⊃ GPA, FHA ⊃ A behöver vi T-><C. A ⊃ HFA, PGA ⊃ A är därmed de satser som svarar mot det semantiska villkoret att om t inträffar tidigare än t′, så inträffar t′ senare än t; och A ⊃ GPA, FHA ⊃ A är de satser som svarar mot det semantiska villkoret att om t′ inträffar senare än t, så inträffar t tidigare än t′. Tillsammans motsvarar satserna A ⊃ HFA, PGA ⊃ A, A ⊃ GPA, FHA ⊃ A det semantiska villkoret att relationen *inträffar tidigare än* är konversen till relationen *inträffar senare än* (och vice versa). I axiomatiska beskrivningar av tidslogiken brukar man ofta anta A ⊃ HFA och A ⊃ GPA eller PGA ⊃ A och FHA ⊃ A som axiom.

$[H]A \supset A, [G]A \supset A, A \supset \langle P\rangle A, A \supset \langle F\rangle A$
$[H]A \supset \langle P\rangle A, \neg([H]A \wedge [H]\neg A), [G]A \supset \langle F\rangle A, \neg([G]A \wedge [G]\neg A)$
$[H]A \supset HA, [G]A \supset GA, PA \supset \langle P\rangle A, FA \supset \langle F\rangle A$
$A \supset HFA, PGA \supset A, A \supset GPA, FHA \supset A$
$A \supset [H]\langle F\rangle A, \langle P\rangle[G]A \supset A, A \supset [G]\langle P\rangle A, \langle F\rangle[H]A \supset A$
$[H]HA \supset HA, H[H]A \supset HA, PA \supset \langle P\rangle PA, PA \supset P\langle P\rangle A$
$[G]GA \supset GA, G[G]A \supset GA, FA \supset \langle F\rangle FA, FA \supset F\langle F\rangle A$
$[H][H]A \supset [H]A, \langle P\rangle A \supset \langle P\rangle\langle P\rangle A, [G][G]A \supset [G]A, \langle F\rangle A \supset \langle F\rangle\langle F\rangle A$
$[G]GA \supset G[G]A, F\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle FA, [H]HA \supset H[H]A, P\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle PA$
$G[G]A \supset [G]GA, \langle F\rangle FA \supset F\langle F\rangle A, H[H]A \supset [H]HA, \langle P\rangle PA \supset P\langle P\rangle A$
$[G]GA \equiv G[G]A, F\langle F\rangle A \equiv \langle F\rangle FA, [H]HA \equiv H[H]A, P\langle P\rangle A \equiv \langle P\rangle PA$
$PGA \supset GPA, FHA \supset HFA, \langle P\rangle[G]A \supset [G]\langle P\rangle A, \langle F\rangle[H]A \supset [H]\langle F\rangle A$
$\langle P\rangle GA \supset G\langle P\rangle A, F[H]A \supset [H]FA, \langle F\rangle HA \supset H\langle F\rangle A, P[G]A \supset [G]PA$

Tabell 8

Teorem 2. Alla satser i tabell 8 är teorem i alla system i den här uppsatsen.

Bevis. Jag skall gå igenom några bevis för att belysa tablåmetoden. Resten lämnas till läsaren.

$A \supset HFA$	$A \supset GPA$
(1) $\neg(A \supset HFA), 0$	(1) $\neg(A \supset GPA), 0$
(2) $A, 0$ [1, $\neg\supset$]	(2) $A, 0$ [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg HFA, 0$ [1, $\neg\supset$]	(3) $\neg GPA, 0$ [1, $\neg\supset$]
(4) $P\neg FA, 0$ [3, $\neg H$]	(4) $F\neg PA, 0$ [3, $\neg G$]
(5) $1 < 0$ [4, P]	(5) $0 < 1$ [4, F]
(6) $\neg FA, 1$ [4, P]	(6) $\neg PA, 1$ [4, F]
(7) $G\neg A, 1$ [6, $\neg F$]	(7) $H\neg A, 1$ [6, $\neg P$]
(8) $\neg A, 0$ [5, 7, G]	(8) $\neg A, 0$ [5, 7, H]
(9) * [2, 8]	(9) * [2, 8]

Notera att dessa bevis inte är korrekta i de multimodal system som beskrivs i Rönnedal (2014). $A \supset HFA$ kan bevisas i alla system som innehåller T-<>C. Beviset ser nästan likadant ut som ovan. Men nod (8) och (9) byts istället ut mot följande noder: (8) $0 > 1$ [5, T-<>C], (9) $\neg A, 0$ [7, 8, G], (10) * [2, 9]. $A \supset GPA$ kan bevisas i alla system som innehåller T-><C. Beviset ovan kan modifieras på ”samma sätt” som beviset för $A \supset HFA$.

$A \supset [G]\langle P\rangle A$ är per definition ekvivalent med $A \supset ((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA))$. För att bevisa $A \supset [G]\langle P\rangle A$ räcker det därför med att bevisa den senare satsen. Det gör vi genom att skapa en semantisk tablå för negationen av $A \supset ((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA))$. Om denna tablå är sluten, så har vi vårt bevis.

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{(1)\ \neg(A \supset ((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA))),\ 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(2)\ A,\ 0\ [1, \neg\supset]} \\
\multicolumn{2}{c}{(3)\ \neg((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA)),\ 0\ [1, \neg\supset]} \\
\multicolumn{1}{r}{\swarrow} & \quad\searrow \\
(4)\ \neg(A \vee PA),\ 0\ [3, \neg\wedge] & (5)\ \neg G(A \vee PA),\ 0\ [3, \neg\wedge] \\
(6)\ \neg A,\ 0\ [4, \neg\vee] & (7)\ F\neg(A \vee PA),\ 0\ [5, \neg G] \\
(8)\ \neg PA,\ 0\ [4, \neg\vee] & (9)\ 0 < 1\ [7, F] \\
(10)\ *\ [2, 6] & (11)\ \neg(A \vee PA),\ 1\ [7, F] \\
 & (12)\ \neg A,\ 1\ [11, \neg\vee] \\
 & (13)\ \neg PA,\ 1\ [11, \neg\vee] \\
 & (14)\ H\neg A,\ 1\ [13, \neg P] \\
 & (15)\ \neg A,\ 0\ [9, 14, H] \\
 & (16)\ *\ [2, 15]
\end{array}$$

$G[G]A \supset [G]GA$ är per definition ekvivalent med $G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA)$. För att bevisa $G[G]A \supset [G]GA$ skapar vi därför en semantisk tablå som börjar med negationen av $G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA)$. Är denna tablå sluten, har vi bevisat $G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA)$ och därmed också $G[G]A \supset [G]GA$.

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{(1)\ \neg(G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA)),\ 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(2)\ G(A \wedge GA),\ 0\ [1, \neg\supset]} \\
\multicolumn{2}{c}{(3)\ \neg(GA \wedge GGA),\ 0\ [1, \neg\supset]} \\
\multicolumn{1}{r}{\swarrow} & \quad\searrow \\
(4)\ \neg GA,\ 0\ [3, \neg\wedge] & (5)\ \neg GGA,\ 0\ [3, \neg\wedge] \\
(6)\ F\neg A,\ 0\ [4, \neg G] & (7)\ F\neg GA,\ 0\ [5, \neg G] \\
(8)\ 0 < 1\ [6, F] & (9)\ 0 < 1\ [7, F] \\
(10)\ \neg A,\ 1\ [6, F] & (11)\ \neg GA,\ 1\ [7, F] \\
(12)\ A \wedge GA,\ 1\ [2, 8, G] & (13)\ A \wedge GA,\ 1\ [2, 9, G] \\
(14)\ A,\ 1\ [12, \wedge] & (15)\ A,\ 1\ [13, \wedge] \\
(16)\ GA,\ 1\ [12, \wedge] & (17)\ GA,\ 1\ [13, \wedge] \\
(18)\ *\ [10, 14] & (19)\ *\ [11, 17]
\end{array}$$

P[G]A ⊃ [G]PA =
P(A ∧ GA) ⊃ (PA ∧ GPA)

(1) ¬(P(A ∧ GA) ⊃ (PA ∧ GPA)), 0
(2) P(A ∧ GA), 0 [1, ¬⊃]
(3) ¬(PA ∧ GPA), 0 [1, ¬⊃]
↙ ↘

(4) ¬PA, 0 [3, ¬∧]	(5) ¬GPA, 0 [3, ¬∧]
(6) H¬A, 0 [4, ¬P]	(7) F¬PA, 0 [5, ¬G]
(8) 1 < 0 [2, P]	(9) 0 < 1 [7, F]
(10) A ∧ GA, 1 [2, P]	(11) ¬PA, 1 [7, F]
(12) A, 1 [10, ∧]	(13) H¬A, 1 [11, ¬P]
(14) GA, 1 [10, ∧]	(15) 2 < 0 [2, P]
(16) ¬A, 1 [6, 8, H]	(17) A ∧ GA, 2 [2, P]
(18) * [12, 16]	(19) A, 2 [17, ∧]
	(20) GA, 2 [17, ∧]
	(21) A, 0 [15, 20, G]
	(22) ¬A, 0 [9, 13, H]
	(23) * [21, 22] ■

Sys	Teorem
<4	HA ⊃ [H]HA, [H]A ⊃ H[H]A, HA ⊃ H[H]A, ⟨P⟩PA ⊃ PA, P⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩A, P⟨P⟩A ⊃ PA, GA ⊃ [G]GA, [G]A ⊃ G[G]A, GA ⊃ G[G]A, ⟨F⟩FA ⊃ FA, F⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩A, F⟨F⟩A ⊃ FA HA ≡ [H]HA, HA ≡ H[H]A, ⟨P⟩PA ≡ PA, P⟨P⟩A ≡ PA, GA ≡ [G]GA, GA ≡ G[G]A, ⟨F⟩FA ≡ FA, F⟨F⟩A ≡ FA [H]A ⊃ [H][H]A, ⟨P⟩⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩A, [G]A ⊃ [G][G]A, ⟨F⟩⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩A, [H][H]A ≡ [H]A, ⟨P⟩⟨P⟩A ≡ ⟨P⟩A, [G][G]A ≡ [G]A, ⟨F⟩⟨F⟩A ≡ ⟨F⟩A.
<C	[G][H]A ⊃ [H][G]A, ⟨P⟩⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩⟨P⟩A, [H][G]A ⊃ [G][H]A, ⟨F⟩⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩⟨F⟩A, [G][H]A ≡ [H][G]A, ⟨P⟩⟨F⟩A ≡ ⟨F⟩⟨P⟩A, [H][G]A ≡ [G][H]A, ⟨F⟩⟨P⟩A ≡ ⟨P⟩⟨F⟩A
<LB	PHA ⊃ HPA, P[H]A ⊃ [H]PA, ⟨P⟩HA ⊃ H⟨P⟩A, ⟨P⟩[H]A ⊃ [H]⟨P⟩A
<UB	FGA ⊃ GFA, F[G]A ⊃ [G]FA, ⟨F⟩GA ⊃ G⟨F⟩A, ⟨F⟩[G]A ⊃ [G]⟨F⟩A

<C <PD <4	$HGA \supset GHA$, $FPA \supset PFA$, $[H]GA \supset G[H]A$, $F\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle FA$, $H[G]A \supset [G]HA$, $\langle F\rangle PA \supset P\langle F\rangle A$, $\langle P\rangle HA \supset H\langle P\rangle A$, $P[H]A \supset [H]PA$
<C <FD <4	$GHA \supset HGA$, $PFA \supset FPA$, $[G]HA \supset H[G]A$, $P\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle PA$, $G[H]A \supset [H]GA$, $\langle P\rangle FA \supset F\langle P\rangle A$, $\langle F\rangle GA \supset G\langle F\rangle A$, $F[G]A \supset [G]FA$
<C <PD <FD <4	$HGA \equiv GHA$, $FPA \equiv PFA$, $GHA \equiv HGA$, $PFA \equiv FPA$, $[H]GA \equiv G[H]A$, $F\langle P\rangle A \equiv \langle P\rangle FA$, $H[G]A \equiv [G]HA$, $\langle F\rangle PA \equiv P\langle F\rangle A$, $[G]HA \equiv H[G]A$, $P\langle F\rangle A \equiv \langle F\rangle PA$, $G[H]A \equiv [H]GA$, $\langle P\rangle FA \equiv F\langle P\rangle A$, $[G][H]A \equiv [H][G]A$, $\langle P\rangle\langle F\rangle A \equiv \langle F\rangle\langle P\rangle A$, $[H][G]A \equiv [G][H]A$, $\langle F\rangle\langle P\rangle A \equiv \langle P\rangle\langle F\rangle A$

Tabell 9 (Sys = System)

Teorem 3. Alla satser i tabell 9 är teorem i de nämnda systemen.

Bevis. Jag skall gå igenom några bevis för att belysa tablåmetoden. Resten lämnas till läsaren.

$H[G]A \supset [G]HA = H(A \wedge GA) \supset (HA \wedge GHA)$

(1) $\neg(H(A \wedge GA) \supset (HA \wedge GHA)), 0$
(2) $H(A \wedge GA), 0$ [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg(HA \wedge GHA), 0$ [1, $\neg\supset$]

↙	↘
(4) $\neg HA, 0$ [3, $\neg\wedge$]	(5) $\neg GHA, 0$ [3, $\neg\wedge$]
(6) $P\neg A, 0$ [4, $\neg H$]	(7) $F\neg HA, 0$ [5, $\neg G$]
(8) $1 < 0$ [6, P]	(9) $0 < 1$ [7, F]
(10) $\neg A, 1$ [6, P]	(11) $\neg HA, 1$ [7, F]
(12) $A \wedge GA, 1$ [2, 8, H]	(13) $P\neg A, 1$ [11, $\neg H$]
(14) $A, 1$ [12, $\wedge$]	(15) $2 < 1$ [13, P]
(16) $GA, 1$ [12, $\wedge$]	(17) $\neg A, 2$ [13, P]
(18) * [10, 14]	

↙	↓	↘
(19) $2 < 0$ [<C]	(20) $2 = 0$ [<C]	(21) $0 < 2$ [<C]
(22) $A \wedge GA, 2$ [2,19,H]	(23) $3 < 0$ [<PD]	(24) $3 < 0$ [<PD]
(25) $A, 2$ [22, $\wedge$]	(26) $A \wedge GA, 3$	(27) $A \wedge GA, 3$
(28) $GA, 2$ [22, $\wedge$]	(29) $A, 3$ [26, $\wedge$]	(30) $A, 3$ [27,$\wedge$]
(31) * [17, 25]	(32) $GA, 3$ [26, $\wedge$]	(33) $GA, 3$
	(34) $A, 0$ [23, 32, G]	(35) $3 < 2$ [<4]
	(36) $A, 2$ [20, 34, Id]	(37) $A, 2$ [G]
	(38) * [17, 36]	(39) * [17, 37]

Nod (19), (20) och (21) ovan fås från ((9) och (15) med) <C (<PC). Nod (26) härleds från (2) och (23) med hjälp av H, och (27) från (2) och (24) med samma regel. Nod (33) fås från (27) med ∧. Nod (35) härleds från (21) och (24) med <4. Nod (37) fås från (33) och (35) med G.

P[H]A ⊃ [H]PA =
P(A ∧ HA) ⊃ (PA ∧ HPA)

(1) ¬(P(A ∧ HA) ⊃ (PA ∧ HPA)), 0
(2) P(A ∧ HA), 0 [1, ¬⊃]
(3) ¬(PA ∧ HPA), 0 [1, ¬⊃]
(4) 1 < 0 [2, P]
(5) A ∧ HA, 1 [2, P]
(6) A, 1 [5, ∧]
(7) HA, 1 [5, ∧]
↙ ↘

(8) ¬PA, 0 [3, ¬∧]	(9) ¬HPA, 0 [3, ¬∧]
(10) H¬A, 0 [8, ¬P]	(11) P¬PA, 0 [9, ¬H]
(12) ¬A, 1 [4, 10, H]	(13) 2 < 0 [11, P]
(14) * [6, 12]	(15) ¬PA, 2 [11, P]
	(16) H¬A, 2 [15, ¬P]
	(17) 3 < 1 [4, 13, <LB]
	(18) 3 < 2 [4, 13, <LB]
	(19) A, 3 [7, 17, H]
	(20) ¬A, 3 [16, 18, H]
	(21) * [19, 20] ■

Teorem 4. Första teoremet (i)-(iv) i avsnitt 4.3 i Rönnedal (2014) gäller också för alla system i den här uppsatsen.

Bevis. För den som vill lära sig handskas med systemen i den här uppsatsen kan det vara en trevlig övning att gå igenom alla dessa teorem. ■

Teorem 5. (i) Alla satser i tabell 21 och 22 i Rönnedal (2014) är teorem i alla system i den här uppsatsen. (ii) Alla satser i tabell 20 och 23 är teorem i alla system i den här uppsatsen som innehåller T-<FD. Byt ut varje förekomst av G mot H, varje förekomst av [G] mot [H], varje förekomst av F mot P, och varje förekomst av ⟨F⟩ mot ⟨P⟩ i tabell 20-23 i Rönnedal (2014). Då gäller det att (iii) varje sats som är ett resultat av en sådan substitution i tabell 21 och 22 är ett teorem i varje system i den här uppsatsen, och (iv) varje sats som är ett

resultat av en sådan substitution i tabell 20 och 23 är ett teorem i alla system i den här uppsatsen som innehåller T-<PD.

Bevis. Jag går igenom ett exempel och lämnar resten till läsaren. Övriga satser kan bevisas på liknande sätt.

$[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset [G]B) =$
$((A \supset B) \wedge G(A \supset B)) \supset ((A \wedge GA) \supset (B \wedge GB))$

(1) $\neg(((A \supset B) \wedge G(A \supset B)) \supset ((A \wedge GA) \supset (B \wedge GB))), 0$
(2) $(A \supset B) \wedge G(A \supset B), 0$ [1, ¬⊃]
(3) $\neg((A \wedge GA) \supset (B \wedge GB)), 0$ [1, ¬⊃]
(4) $A \supset B, 0$ [2, ∧]
(5) $G(A \supset B), 0$ [2, ∧]
(6) $A \wedge GA, 0$ [3, ¬⊃]
(7) $\neg(B \wedge GB), 0$ [3, ¬⊃]
(8) $A, 0$ [6, ∧]
(9) $GA, 0$ [6, ∧]
↙ ↘
(10) $\neg A, 0$ [4, ⊃] (11) $B, 0$ [4, ⊃]
(12) * [8, 10] ↙ ↘
(13) $\neg B, 0$ [7, ¬∧] (14) $\neg GB, 0$ [7, ¬∧]
(15) * [11, 13] (16) $F\neg B, 0$ [14, ¬G]
(17) $0 < 1$ [16, F]
(18) $\neg B, 1$ [16, F]
(19) $A, 1$ [9, 17, G]
(20) $A \supset B, 1$ [5, 17, G]
↙ ↘
(21) $\neg A, 1$ [20, ⊃] (22) $B, 1$ [20, ⊃]
(23) * [19, 21] (24) * [18, 22] ■

Ibland kan det vara enklare att bevisa en sats i ett multimodalt system av den typ som beskrivs i Rönnedal (2014) än i ett bimodalt system av den typ som används i den här uppsatsen, bl.a. eftersom bevisen i de tidigare systemen ibland är kortare än bevisen i de senare. Tablån för negationen av $[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset [G]B)$ är t.ex. betydligt kortare än trädet ovan. Ännu tydligare blir detta om man vill bevisa en sats med många operatorer av samma typ, t.ex. $([H](A \vee B) \wedge [H](A \vee [H]B) \wedge [H]([H]A \vee B)) \supset ([H]A \vee [H]B)$. Denna sats är ett teorem i alla multimodala system som innehåller T-≤PC. Satsen kan även bevisas i alla system i den här uppsatsen som innehåller T-<PC. Men då måste man först översätta den till följande sats i primitiv notation: $(((A \vee B) \wedge H(A \vee B)) \wedge ((A \vee (B \wedge HB)) \wedge H(A \vee (B \wedge HB))) \wedge (((A \wedge HA) \vee B) \wedge H((A \wedge HA) \vee B))) \supset ((A \wedge HA) \vee (B \wedge HB))$, och skapa en semantisk tablå för negationen av denna sats.

Ibland kan det vara enklare att bevisa en sats i ett bimodalt system av det slag som används i den här uppsatsen än i ett multimodalt system av det slag som beskrivs i Rönnedal (2014), bl.a. eftersom man måste hålla reda på en mängd olika tillgänglighetsrelationer i de senare.

Låt mig avsluta detta avsnitt med att nämna ytterligare några teorem i olika system.

System	Teorem
T-<4	$HA \supset HHA$, $PPA \supset PA$, $GA \supset GGA$, $FFA \supset FA$
	$FA \supset HFA$, $PGA \supset GA$, $PA \supset GPA$, $FHA \supset HA$
T-<PD	$HA \supset PA$, $\neg(HA \wedge H\neg A)$, $HA \supset \langle P\rangle A$, $[H]A \supset PA$
T-<FD	$GA \supset FA$, $\neg(GA \wedge G\neg A)$, $GA \supset \langle F\rangle A$, $[G]A \supset FA$
T-<DE	$PA \supset PPA$, $HHA \supset HA$, $(A \vee H(\bot \vee HB)) \supset (A \vee HB)$
	$FA \supset FFA$, $GGA \supset GA$, $(A \vee G(\bot \vee GB)) \supset (A \vee GB)$
T-<PC	$H([H]A \supset B) \vee H([H]B \supset A)$
	$FPA \supset (PA \vee A \vee FA)$, $(HA \wedge A \wedge GA) \supset GHA$
	$PA \supset H(FA \vee A \vee PA)$, $P(HA \wedge A \wedge GA) \supset HA$
	$(PA \wedge PB) \supset (P(A \wedge B) \vee P(A \wedge PB) \vee P(PA \wedge B))$
	$(H(A \vee B) \wedge H(A \vee HB) \wedge H(HA \vee B)) \supset (HA \vee HB)$
	$H((A \wedge HA) \supset B) \vee H((B \wedge HB) \supset A)$
	$(\langle P\rangle A \wedge \langle P\rangle B) \supset (\langle P\rangle(A \wedge B) \vee \langle P\rangle(A \wedge \langle P\rangle B) \vee \langle P\rangle(\langle P\rangle A \wedge B))$
	$([H](A \vee B) \wedge [H](A \vee [H]B) \wedge [H]([H]A \vee B)) \supset ([H]A \vee [H]B)$
	$P(HB \wedge \neg A) \supset H(A \supset (HA \supset B))$, $H(A \supset (HA \supset B)) \vee H(HB \supset A)$
T-<FC	$G([G]A \supset B) \vee G([G]B \supset A)$
	$PFA \supset (PA \vee A \vee FA)$, $(HA \wedge A \wedge GA) \supset HGA$
	$FA \supset G(PA \vee A \vee FA)$, $F(HA \wedge A \wedge GA) \supset GA$
	$(FA \wedge FB) \supset (F(A \wedge B) \vee F(A \wedge FB) \vee F(FA \wedge B))$
	$(G(A \vee B) \wedge G(A \vee GB) \wedge G(GA \vee B)) \supset (GA \vee GB)$
	$G((A \wedge GA) \supset B) \vee G((B \wedge GB) \supset A)$
	$(\langle F\rangle A \wedge \langle F\rangle B) \supset (\langle F\rangle(A \wedge B) \vee \langle F\rangle(A \wedge \langle F\rangle B) \vee \langle F\rangle(\langle F\rangle A \wedge B))$
	$([G](A \vee B) \wedge [G](A \vee [G]B) \wedge [G]([G]A \vee B)) \supset ([G]A \vee [G]B)$
	$F(GB \wedge \neg A) \supset G(A \supset (GA \supset B))$, $(G(A \supset (GA \supset B)) \vee G(GB \supset A)$

Tabell 10

System	Teorem
<FD<4	$FA \supset FPA$, $GHA \supset GA$, $GHA \supset (HA \wedge A \wedge GA)$, $(PA \vee A \vee FA) \supset FPA$
<PD<4	$PA \supset PFA$, $HGA \supset HA$, $HGA \supset (HA \wedge A \wedge GA)$, $(PA \vee A \vee FA) \supset PFA$
FD4FC	$GHA \supset HGA$, $PFA \supset FPA$
PD4PC	$HGA \supset GHA$, $FPA \supset PFA$
PD4FC	$HGA \equiv (HA \wedge A \wedge GA)$, $PFA \equiv (PA \vee A \vee FA)$
FD4PC	$GHA \equiv (HA \wedge A \wedge GA)$, $FPA \equiv (PA \vee A \vee FA)$
<C<4	$H(HA \supset HB) \vee H(HB \supset HA)$, $G(GA \supset GB) \vee G(GB \supset GA)$
<4<LB	$(PA \wedge PB) \supset P(FA \wedge FB)$, $H(GA \vee GB) \supset (HA \vee HB)$
<4<UB	$(FA \wedge FB) \supset F(PA \wedge PB)$, $G(HA \vee HB) \supset (GA \vee GB)$

Tabell 11

Teorem 6. Alla satser i tabell 10 och tabell 11 är teorem i de omnämnda systemen.

Bevis. Lämnas till läsaren. ■

5. Sundhets- och fullständighetsteorem

Begreppen sundhet och fullständighet definieras som vanligt. Låt oss emellertid repetera dessa definitioner. Vi säger att S korresponderar med en klass av ramar, **F**, (och att **F** korresponderar med S) omm $\mathbf{F} = \mathbf{F}(C\text{-}A_1, \ldots, C\text{-}A_n)$, där $S = TT\text{-}A_1 \ldots T\text{-}A_n$ är ett normalt temporalt tablåsystem.

S är (starkt) sunt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \vdash_S A$ medför $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$. S är (starkt) fullständigt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$ medför $\Sigma \vdash_S A$.

I det här avsnittet visar vi att alla de temporala tablåsystem vi kan konstruera med hjälp av våra tablåregler är sunda och fullständiga med avseende på deras semantik.

5.1. Sundhet

Låt M vara en (monotemporal) modell och b en gren på en tablå. Då är b (eller mängden av satser på b) satisfierbar i M omm det finns en funktion, f, från de naturliga talen till mängden av alla tidpunkter T sådan att:

(i) A är sann i f(i) i M, för varje nod A, i på b;
(ii) om $i < j$ är på b, så är $f(i) < f(j)$ i M;
om $i = j$ är på b, så är $f(i) = f(j)$ i M.

Om f uppfyller dessa villkor, skall vi säga att f visar att b är satisfierbar i M.

Lemma (Sundhetslemma). Låt b vara en gren på en tablå och M vara en (monotemporal) modell. Om b är satisfierbar i M och en tablåregel tillämpas på b, så produceras åtminstone en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

Bevis. Som vanligt börjar vi med att visa att sundhetslemmat gäller för T. Sen utvidgar vi det till andra system. Detta görs på samma sätt som i olika modala system och som i multimodal tidslogik (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b), (2014) och Priest (2008)). Låt oss gå igenom några tillgänglighetsregler. Utelämnade steg bevisas på liknande sätt. Stegen för de satslogiska reglerna är välkända. Stegen för de grundläggande temporala reglerna är enkla modifikationer av välkända bevis.

T-<FD. Antag att vi har i på b, och att vi tillämpar T-<FD och får en utvidgad gren, b′, av b som innehåller i < j, där j är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M, så finns det en tidpunkt f(i) i M. M uppfyller villkoret C-<FD. Alltså finns det en tidpunkt t i M, sådan att f(i) < t. Låt f′ vara likadan som f förutom att f′(j) = t. Då gäller det att f′(i) < f′(j). Eftersom j inte förekommer på b, visar f′ att b′ är satisfierbar i M.

T-<C. Antag att vi har i och j på b, och att vi tillämpar T-<C på denna gren. Då får vi tre utvidgningar av b, som slutar med i < j, i = j, respektive j < i. Eftersom b är satisfierbar i M, så är f(i) och f(j) i M. M uppfyller villkoret C-<C. Alltså gäller det att f(i) < f(j), f(i) = f(j) eller f(j) < f(i) i M. I varje fall finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

T-<DE. Antag att vi har i < j på b, och att vi tillämpar regeln T-<DE och får i < k och k < j, där k är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M så finns det en funktion f sådan att f(i) < f(j) i M. M uppfyller villkoret C-<DE. Således finns det en tidpunkt t i M, sådan att f(i) < t och t < f(j). Låt f′ vara likadan som f förutom att f′(k) = t. Då gäller det att f′(i) < f′(k) och f′(k) < f′(j). Eftersom k inte förekommer på b, visar f′ att b′ är satisfierbar i M.

T-<FC. Antag att i < j och i < k är på b och att vi tillämpar T-<FC på denna gren. Då får vi tre utvidgningar av b, som slutar med j < k, j = k, respektive k < j. Eftersom b är satisfierbar i M, så gäller det att f(i) < f(j) och f(i) < f(k) i M. M uppfyller villkoret C-<FC. Det följer att f(j) < f(k), f(j) = f(k) eller f(k) < f(j) i M. I varje fall finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

Id(I). Antag att vi har A(i) och i = j på b och att vi tillämpar Id(I) på denna gren. Då får en utvidgning av b som innehåller A(j). Eftersom b är satisfierbar i M, så gäller det att f(i) = f(j). Om A(i) är A, i, så är A sann i f(i).

Alltså är A sann i f(j). Om A(i) är $i < k$, så gäller det att $f(i) < f(k)$. Det följer att $f(j) < f(k)$, vilket skulle bevisas osv. I varje fall gäller alltså lemmat. ■

Teorem 7 (Sundhetsteorem). Låt S vara ett av de temporala system som vi har introducerat i den här uppsatsen och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S starkt sunt med avseende på **F**.

Bevis. När vi väl har etablerat sundhetslemmat kan vi bevisa sundhetsteoremet på samma sätt som för olika modala eller multimodala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). ■

5.2. Fullständighet

Inducerad modell (Def.IM). Låt b vara en öppen (avslutad) gren i en semantisk tablå, och låt I vara mängden av alla tal på b. Vi skall säga att $i \sim j$ omm $i = j$, eller ”$i = j$” eller ”$j = i$” förekommer på b. $\sim$ är en ekvivalensrelation och [i] är i’s ekvivalensklass (definierad av denna relation). Den monotemporala modell, $M = \langle T, <, V\rangle$, som induceras från b definieras på följande sätt:

$T = \{t_{[i]}: i \in I\}$;
$t_{[i]} < t_{[j]}$ omm $i < j$ förekommer på b;
p är sann vid $t_{[i]}$, om p, i förekommer på b;
p är falsk vid $t_{[i]}$, om $\neg p$, i förekommer på b.

Om vårt tablåsystem inte innehåller några identitetsregler, reduceras $\sim$ till identitet och $[i] = i$. Alltså kan vi i sådana system låta T vara $\{t_i: i \in I\}$ och göra oss av med ekvivalensklasserna. Notera också att < och V är väldefinierade. Tack vare identitetsreglerna gäller det nämligen att om $[i] = [i']$ och $[j] = [j']$, så är $i < j$ på b omm $i' < j'$ är på b, p, i är på b omm p, i′ är på b, och $\neg p$, i är på b omm $\neg p$, i′ är på b.

Lemma (Fullständighetslemma). Låt b vara en gren på en fullständig tablå och låt M vara en modell som induceras från b. Då gäller det att:

(i) Om A, i är på b, så är A sann i $t_{[i]}$, och
(ii) Om $\neg A$, i är på b, så är A falsk i $t_{[i]}$.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala system och multimodal tidslogik (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). Stegen för de satslogiska konnektiven och för de grundläggande temporala operatorerna är välkända eller modifikationer av välkända bevis. ■

Teorem 8 (Fullständighetsteorem). Låt S vara ett av de system vi diskuterar i den här uppsatsen och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S (starkt) fullständigt i relation till **F**.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala och multimodala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b), (2014) eller Priest (2008)).

Den intressanta nyheten är att vi måste visa att den modell som induceras från den öppna grenen, b, i varje fall är av rätt slag. Vi skall gå igenom några av alla steg. Övriga fall bevisas på liknande sätt.

C-<FD. Antag att $t_{[i]} \in T$. Då förekommer i på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<FD tillämpats och vi har $i < j$, för något j, på b. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[j]}$, sådan att $t_{[i]} < t_{[j]}$ [från Def.IM].

C-<4. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[j]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $i < j$ och $j < k$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<4 applicerats och vi har $i < k$ på b. Det följer att $t_{[i]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

C-<DE. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]} \in T$. Då förekommer $i < j$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<DE tillämpats och vi har $i < k$ och $k < j$, där k är ny. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[k]}$, sådan att $t_{[i]} < t_{[k]}$ och $t_{[k]} < t_{[l]}$ [från Def.IM].

C-<FC. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[i]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $i < j$ och $i < k$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har vi tillämpat T-<FC och vi har $j < k$, $j = k$ eller $k < j$ på b. Om $j = k$ är på b, så $j \sim k$; och om $j \sim k$, så $[j] = [k]$. Det följer att $t_{[j]} < t_{[k]}$, $t_{[j]} = t_{[k]}$ eller $t_{[k]} < t_{[j]}$, vilket skulle bevisas [från Def.IM].

C-<UB. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[i]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $i < j$ och $i < k$ på b [från Def.IM]. T-<UB har applicerats, eftersom b är fullständig. Alltså har vi $j < l$ och $k < l$ på b, där l är ny. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[l]}$ i T, sådan att $t_{[j]} < t_{[l]}$ och $t_{[k]} < t_{[l]}$ [från Def.IM]. ■

Referenser

Barringer, H. Fisher, M. Gabbay, D. & Gough, G. (red.) (2000). *Advances in Temporal Logic*. Springer.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, no. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i Hintikka (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Burgess, J. P. (1984). Basic Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenthner (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 2, Dordrecht: Reidel, ss. 89-133.

D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R., & Posegga, J. (red.) (1999) *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fitting, M. & Mendelsohn, R. L. (1998). *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers.

Finger, M. Gabbay, D. & Reynolds, M. (2002). Advanced Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenther (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, ss. 43-203.

Galton, A. (1999). Temporal Logic. I N. Zalta (red.) *Stanford Encyclopedia* of Philosophy. Hämtat från <http://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/> den 17 oktober 2014. Först publicerat 29 november 1999, uppdaterat 7 februari 2008.

Garson, J. W. (2006). *Modal Logic for Philosophers*. New York: Cambridge University Press.

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das Logische Shliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Shliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Goldblatt, R. (1992). *Logics of Time and Computation*. CSLI.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. New York: McGraw-Hill.

Kröger, F. & Merz, S. (2008). *Temporal Logic and State Systems*. Springer.

McArthur, R. P. (1976). *Tense Logic*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Needham, P. (1975). *Temporal Perspective*. Filosofiska Studier 25, Uppsala Universitet.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1957). *Time and Modality*. Oxford.

Prior, A. N. (1967). *Past, Present and Future*. Oxford.

Rescher, N. & Urquhart, A. (1971). *Temporal logic*. Wien: Springer-Verlag.

Rönnedal, D. (2012). Temporal alethic-deontic logic and semantic tableaux. *Journal of Applied Logic*, 10, ss. 219-237.

Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.

Rönnedal, D. (2014). Tidslogik som Multimodal Logik. *Filosofiska Notiser*, Årgång 1, Nr. 1, ss. 59-90.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.

Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.

van Benthem, J. (1983). *The Logic of Time*. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publishers.

Øhrstrøm P. & Hasle, P. F. V. (1995). *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Platsbestämda Normer och Kvantifierad Deontisk Logik

Daniel Rönnedal

Abstrakt

Det tycks finnas normer som är knutna till vissa platser eller geografiska områden, normer som uttalar sig om vad som bör, får och inte får vara fallet på olika ställen. Det är uppenbart att juridiska förbud, tillåtelser och plikter ofta är av detta slag, men det är rimligt att anta att även moraliska påbud kan vara relaterade till specifika orter. Vi skall kalla sådana normer ”platsbestämda”. I den här uppsatsen undersöker jag den logiska formen hos sådana föreskrifter. Jag tar upp ett antal argument som innehåller påståenden om plikter, tillåtelser och förbud som alla på något sätt är kopplade till vissa platser. En del av dessa är intuitivt giltiga medan andra är intuitivt ogiltiga. Jag visar hur man kan använda en kvantifierad deontisk logik för att förklara dessa intuitioner. Den grundläggande tolkningen av platsbestämda normer som presenteras i den här uppsatsen bygger på Donald Davidsons analys av handlingssatser. Om denna är korrekt, pekar den på behovet av en kvantifierad deontisk logik. Faktumet att tolkningen medför intuitivt rimliga resultat visar att analysen ifråga är fruktbar.

1. Introduktion

Betrakta följande normer:

> Det är inte tillåtet att du parkerar din bil på den här gatan.
> Det är tillåtet att du parkerar din bil på den här parkeringsplatsen.
> Det är förbjudet att du röker i den här restaurangen.
> Det är tillåtet att du röker i den här rökrutan.
> Du bör inte röka i din säng.
> Det är inte tillåtet att någon köper sex i Sverige.
> Det är tillåtet att du köper sex i Tyskland.

Otaliga normer är av detta slag. De tycks alla i någon mening referera till en plats: den här gatan, den här parkeringsplatsen, den här restaurangen, den här

Filosofiska Notiser, Årgång 2, Nr. 2, September 2015, 77-92

rökrutan, din säng, Sverige, Tyskland. Vi skall kalla normer av detta slag ”platsbestämda normer”. Hur skall man förstå den logiska formen hos principer av detta slag? Vad följer och vad följer inte ur dem? Kan de härledas från plikter, tillåtelser och förbud som inte är platsbestämda? Vi skall i den här uppsatsen undersöka normer av denna typ och vi skall se vad de kan tänkas ha för logisk form. Den tolkning som presenteras bygger på Donald Davidsons analys av handlingssatser, som går ut på att vi explicit kvantifierar över handlingar när vi symboliserar sådana satser. Denna analys kräver att vi har tillgång till predikatlogikens variabler och kvantifikatorer och den pekar därför på behovet av en kvantifierad deontisk logik.

Trots att normer av denna typ är mycket vanliga känner jag inte till någon logisk undersökning som explicit behandlar föreskrifter av detta slag. Följande uppsats är därför mer än väl motiverad.

Uppsatsen är indelad i 5 avsnitt. Avsnitt 2 innehåller en mängd argument formulerade i svenska. Några av dessa är intuitivt giltiga, några intuitivt ogiltiga. Avsnitt 3 är en genomgång av Davidsons analys av handlingssatser och några skäl som talar för denna analys. I avsnitt 4 visar vi hur argumenten i avsnitt 2 kan symboliseras i en kvantifierad deontisk logik och hur vi kan använda vår logik för att bevisa att de intuitivt giltiga argumenten är giltiga och att de intuitivt ogiltiga argumenten är ogiltiga. Detta talar för att den tolkning vi föreslår är fruktbar. Avsnitt 5 innehåller en sammanfattning av uppsatsen och en slutsats.

2. Argument som innehåller platsbestämda normer

Vissa argument som innehåller platsbestämda normer tycks vara giltiga och vissa tycks vara ogiltiga. Betrakta följande argument.

Argument 1
Du bör inte röka.
Alltså bör du inte röka i den här byggnaden.

Argument 2
Det är förbjudet att du dränker din granne.
Alltså är det förbjudet att du dränker din granne i din grannes pool.

Argument 3
Det är tillåtet att du röker i den här rökrutan.
Alltså är det tillåtet att du röker.

Argument 4
Du bör inte röka någonstans.
Alltså bör du inte röka i din säng.

Argument 5
Det är inte tillåtet att du parkerar din bil någonstans.
Alltså är det inte tillåtet att du parkerar din bil på den här gatan.

Argument 6
Det är tillåtet att du parkerar din bil på den här gatan.
Alltså är det tillåtet att du parkerar din bil någonstans.

Argument 7
Det är inte tillåtet att du parkerar någonting någonstans.
Alltså är det förbjudet att du parkerar din bil på den här gatan.

Alla dessa argument tycks vara giltiga. Slutsatsen tycks i varje fall följa från premissen, dvs. det tycks vara nödvändigt att om premissen är sann, så är också slutsatsen sann. Ett argument kan vara giltigt även om premisserna inte är sanna. Så, när vi säger att alla argument ovan tycks vara giltiga, säger vi ingenting om sanningsvärdena hos de olika premisserna.

Betrakta nu följande argument.

Argument 8
Det är förbjudet att du röker i den här restaurangen.
Alltså är det förbjudet att du röker.

Argument 9
Det är inte tillåtet att du parkerar din bil på den här gatan.
Alltså är det inte tillåtet att du parkerar din bil någonstans.

Argument 10
Du bör inte röka i din säng.
Alltså bör du inte röka någonstans.

Alla dessa argument tycks vara ogiltiga, dvs. i varje fall tycks det vara möjligt att premissen är sann och slutsatsen falsk. Betrakta t.ex. argument 8. Det tycks kunna vara sant att det är förbjudet att du röker i den här restaurangen samtidigt som det inte är förbjudet att du röker. Det kan t.ex. vara tillåtet att du röker på trottoaren utanför restaurangen. På samma sätt förhåller det sig med argument 9 och 10. Det tycks kunna vara sant att det inte är tillåtet att du parkerar din bil på den här gatan samtidigt som det är tillåtet att du parkerar din bil någon annanstans, t.ex. på parkeringsplatsen. Slutligen tycks det *kunna* vara sant att du inte bör röka i din säng samtidigt som det är falskt att du inte bör röka någonstans. Förvisso kanske det är *sant* att du inte bör röka någonstans, eftersom det är dåligt för hälsa och ekonomi. Men denna slutsats tycks inte *följa* från premissen att du inte bör röka i din säng. Premissen kanske är sann därför att det är farligt att röka i sängen, det kan börja brinna om man somnar med en tänd cigarett. Det faktum att slutsatsen i ett visst argument är *sann*, medför inte att argumentet är *giltigt*.

Det tycks vara svårt att förklara dessa intuitioner med hjälp av klassisk monadisk deontisk logik. I en bimodal aletisk-deontisk logik (Rönnedal (2012), (2012b)) kan man bevisa giltigheten hos argumenten ovan med hjälp av implicita premisser. Betrakta t.ex. argument 2. Om vi lägger till premissen att det är nödvändigt att om du dränker din granne i din grannes pool, så dränker du din granne, så kan vi bevisa att detta argument är giltigt.[1] På liknande sätt kan man visa att övriga slutledningar är giltiga. Men detta kräver att vi lägger till implicita premisser till varje argument. Frågan är om vi kan klara oss utan antaganden av sådant slag? Innan vi kan besvara denna fråga skall vi undersöka Davidsons analys av handlingssatser.

3. Donald Davidsons analys av handlingssatser

Donald Davidson är intresserad av att förstå vilken logisk form handlingssatser har. I Davidson (1967) presenterar den amerikanske filosofen ett förslag på hur sådana satser kan analyseras med hjälp av klassisk predikatlogik.[2] Med en ”handlingssats” menar han en sats i ett naturligt språk, såsom svenska eller engelska, som uttalar sig om handlingar, t.ex. ”Anna sparkar Sara”, ”Jones bredde en smörgås i köket efter midnatt”, och ”Booth sköt Lincoln med en derringer på Fords teater”.

---

[1] Beviset ”kräver” att vi antar att den s.k. deontiska tillgänglighetsrelationen är inkluderad i den s.k. aletiska tillgänglighetsrelationen. Antar vi detta följer det att om det är nödvändigt att A implicerar B och det är förbjudet att B, så är det förbjudet att A.

[2] Davidson (1967) har publicerats på nytt som kapitel 6 i Davidson (2001), som också innehåller svar på en del kritik som riktats mot analysen. För mer information om detta eller om Davidsons filosofi i övrigt, se t.ex. Lemmons, Castañedas och Chisholms kommentarer i Rescher (red.) (1967), Glüer (2011), Lepore & Ludwig (red.) (2013), Ludwig (red.) (2003), McCann (2013), och Pietroski (2013).

Tanken är att handlingsverb, verb som säger vad någon gör, bör konstrueras på ett sådant sätt att de innehåller en plats för singulära termer eller variabler, som de, åtminstone vid en första anblick, inte tycks göra och som refererar till eller kan bytas ut mot symboler som refererar till handlingar. Handlingssatser innehåller så att säga en implicit kvantifikator som varierar över handlingar, som är ett slags händelser. En händelse är, enligt denna analys, en konkret, icke-upprepbar entitet.

Betrakta följande sats:

(1) Anna sparkar Sara.

I vanlig satslogik symboliserar vi denna sats med en atomär proposition, t.ex. S (Anna sparkar Sara). I predikatlogik kan vi formalisera ”sparkar Sara” med ett ett-ställigt predikat, Sx (x sparkar Sara), som antas tillskriva x egenskapen att sparka Sara. Ett alternativ är att betrakta ”sparkar” som ett relationsuttryck, som kan symboliseras med ett två-ställigt predikat, Sxy, som säger att x sparkar y. Antag att a och s är singulära termer som refererar till Anna respektive Sara. ”Anna sparkar Sara” kan då antingen symboliseras med ”Sa” eller ”Sas”. Enligt Davidson bör vi dock förstå ”sparkar” som ett tre-ställigt predikat och symbolisera ”Anna sparkar Sara” på följande sätt:

(1F) $\exists x Sasx$.

Variabeln x i Sasx kan bytas ut mot en term som refererar till en partikulär handling. Hela uttrycket säger att det finns en handling x som står i en viss relation till Anna och Sara, eller – alternativt – att det finns en handling x som har egenskapen att stå i en viss relation till Anna och Sara. Det är inte helt lätt att hitta någon smidig svensk sats som uttrycker samma sak. Kanske det bästa vi kan åstadkomma är följande: ”Det finns ett x sådant att x är en handling som består i att Anna sparkar Sara”. Sasx säger då att x har egenskapen att vara en handling som består i att Anna sparkar Sara.

Men varför skall vi acceptera denna komplicerade analys när vi istället kan använda de enklare symboliseringarna Sa eller Sas? Är inte Davidsons teori onödigt komplicerad och långsökt? Den svenska satsen ”Anna sparkar Sara” innehåller inte någon ”kvantifikator” eller något ”kvantifikatoruttryck” som varierar över handlingar, åtminstone inte explicit. Låt oss gå igenom några skäl som gör denna analys attraktiv.

Betrakta följande satser:

(2) Booth skjuter Lincoln på Fords teater.
(3) Booth skjuter Lincoln.

(2) tycks medför (3), men (3) tycks inte medföra (2). Om vi använder Davidsons analys av dessa satser kan vi förklara detta. Låt b vara en singulär term som refererar till Booth, l en singulär term som refererar till Lincoln, f en singulär term som refererar till Fords teater, Syzx ett tre-ställigt predikat som läses ”x är en handling som består i att y skjuter z”, och Pyx ett två-ställigt predikat som läses ”x utförs på y”. (2) symboliseras då på följande sätt (2F) $\exists x(Sblx \land Pfx)$ och (3) på följande sätt (3F) $\exists xSblx$. $\exists x(Sblx \land Pfx)$ läses ”Det finns ett x sådant att x är en handling som består i att Booth skjuter Lincoln och x (denna handling) utförs på Fords teater”, och $\exists xSblx$ läses ”Det finns ett x sådant att x är en handling som består i att Booth skjuter Lincoln”. (2F) medför (3F) i vanlig predikatlogik, medan (2F) inte följer ur (3F). Om vi använder ett två-ställigt predikat Sxy (x skjuter y) för att symbolisera (3) och ett tre-ställigt predikat Sxyz (x skjuter y på z) för att symbolisera (2), kan vi dock inte visa detta. Sblf medför inte Sbl.

Man kan använda samma sorts analys för att lägga till eller dra ifrån en obestämd mängd prepositionsfraser. Betrakta följande satser:

(4) Booth skjuter Lincoln med en derringer på Fords teater.
(5) Booth skjuter Lincoln på Fords teater med en derringer.
(6) Booth skjuter Lincoln med en derringer.
(7) Booth skjuter Lincoln på Fords teater. ((7) = (2))
(8) Booth skjuter Lincoln. ((8) = (3))

(4) och (5) tycks vara logiskt ekvivalenta (och alltså medföra varandra). (4) och (5) (var för sig) tycks medföra (6), (7) och (8). (6) och (7) (var för sig) tycks medföra (8). (8) tycks inte medföra någon av de övriga satserna. Varken (6) eller (7) tycks medföra varken (4) eller (5). (6) tycks inte medföra (7) och (7) tycks inte medföra (6). Dessa fakta kan enkelt förklaras med hjälp av Davidsons analys. Låt Dx vara ett ett-ställigt predikat som läses ”x är en derringer” och Myx ett två-ställigt predikat som läses ”x utförs med y” och övriga symboler tolkas som ovan. Då kan (4) symboliseras på följande sätt $\exists x(Sblx \land \exists y(Dy \land Myx) \land Pfx)$, (5) på följande sätt $\exists x(Sblx \land Pfx \land \exists y(Dy \land Myx))$, (6) på följande sätt $\exists x(Sblx \land \exists y(Dy \land Myx))$ och övriga satser på samma sätt som ovan. $\exists x(Sblx \land \exists y(Dy \land Myx) \land Pfx)$ läses ”Det finns ett x sådant att x är en handling som består i att Booth skjuter Lincoln och det

finns ett y sådant att y är en derringer och x utförs med y och x utförs på Fords teater, $\exists x(Sblx \wedge Pfx \wedge \exists y(Dy \wedge Myx))$ läses ”Det finns ett x sådant att x är en handling som består i att Booth skjuter Lincoln och x utförs på Fords teater och det finns ett y sådant att y är en derringer och x utförs med y”, och $\exists x(Sblx \wedge \exists y(Dy \wedge Myx))$ läses ”Det finns ett x sådant att x är en handling som består i att Booth skjuter Lincoln och det finns ett y sådant att y är en derringer och x utförs med y”. Då gäller alla ovannämnda implikationer. Använder vi inte Davidsons analys är det svårt att förklara dessa fakta.

Ett annat skäl som talar för Davidsons analys är att den kan användas för att förklara vad vissa anaforiska pronomen refererar till. Betrakta följande sats.

(9) Booth skjuter Lincoln på Fords teater och han gör *det* med en derringer.

Ordet ”det” i den här satsen är ett anaforiskt pronomen. Men vad refererar det till? Uppenbarligen inte till Booth, och inte till Lincoln, och inte till Fords teater. Det enda ”det” tycks kunna referera till är Booths handling. Om Davidsons analys är korrekt, kan vi förstå den logiska formen hos (9) på följande sätt: $\exists x(Sblx \wedge Pfx \wedge \exists y(Dy \wedge Myx))$. Utan Davidsons analys är det svårt att hitta en rimlig symbolisering av (9).

Vidare, Davidsons analys blottlägger mångtydigheten hos en mängd olika satser. Betrakta t.ex. följande utsaga.

(10) Booth skjuter *inte* Lincoln med en derringer på Fords teater.

(10) tycks ha åtminstone tre olika läsningar. Satsen kan betyda detsamma som (10a) ”Det är *inte* fallet att Booth skjuter Lincoln med en derringer på Fords teater”, (10b) ”Booth skjuter Lincoln med en derringer, men *inte* på Fords teater”, eller (10c) ”Booth skjuter Lincoln på Fords teater, men *inte* med en derringer”. Med hjälp av Davidsons analys kan vi symbolisera (10) på åtminstone tre olika sätt: (10aF). $\neg\exists x(Sblx \wedge \exists y(Dy \wedge Myx) \wedge Pfx)$, (10bF) $\exists x(Sblx \wedge \exists y(Dy \wedge Myx) \wedge \neg Pfx)$, (10cF) $\exists x(Sblx \wedge Pfx \wedge \neg\exists y(Dy \wedge Myx))$. Davidsons analys har alltså den fördelen att den förutsäger läsningar som reflekterar den mångtydighet som tycks finnas i naturliga språk.

Här följer ett annat exempel.

(11) Alla musiker flyttar pianot.

Betyder denna sats att alla musiker tillsammans deltar i en kollektiv handling och flyttar pianot, eller betyder den att varje musiker var för sig utför en handling som består i att flytta pianot? En rimlig uppfattning tycks vara att satsen har båda dessa läsningar. Om detta är korrekt, speglar Davidsons analys mångtydigheten hos satser av detta slag på ett mycket bra sätt. Låt p vara en singulär term som refererar till pianot, Mx vara ett ett-ställigt predikat som läses ”x är en musiker” och Fyzx ett tre-ställigt predikat som läses ”x är en handling som består i att y flyttar z”. Då kan (11) symboliseras med $\forall y(My \rightarrow \exists xFypx)$ eller med $\exists x(\forall y(My \rightarrow Fypx))$.

Notera att satsen ”Booth skjuter Lincoln” inte tycks medföra att Booth skjuter Lincoln endast en gång. Att Booth skjuter Lincoln tycks vara förenligt med att Booth skjuter Lincoln flera gånger. Dessa fakta speglas väl i våra predikatlogiska symboliseringar. $\exists xSblx$ medför att det finns en handling som består i att Booth skjuter Lincoln, men inte att det finns endast *en* sådan handling.

Kanske kan andra handlingssatser analyseras på liknande sätt, t.ex. handlingssatser som innehåller andra adverbial som modifierar verben i sådana satser. ”Jessica springer fort” skulle då kunna symboliseras på följande sätt: $\exists x(Sjx \wedge Fx)$. Men vi behöver inte ta ställning till om detta är riktigt eller ej. De ovanstående punkterna är tillräckliga för att visa att Davidsons grundläggande idé är mycket attraktiv.

Så, även om Davidsons analys kanske inte förefaller vara särskilt tilltalande vid en första anblick, så finns det goda skäl att acceptera den. Vi skall nu se hur denna analys kan användas för att förklara de intuitioner vi nämnde i avsnitt 2.

4. Analys av argument

Vi skall i det här avsnittet visa att argument 1-7 i avsnitt 2 är giltiga och att argument 8-10 i samma avsnitt är ogiltiga, givet att Davidsons analys av handlingssatser är riktig. För att visa att argument 4-7 är giltiga tycks det dock krävas att vi adderar vissa implicita premisser. Mer om detta senare. Jag kommer inte att gå igenom alla härledningar, men jag kommer att ta upp några exempel. För att visa att ett argument är giltigt kommer vi i regel att använda s.k. semantiska tablåsystem. Den intuitiva tanken är att en slutledning är giltig om och endast om det är omöjligt att slutsatsen är falsk om alla premisser är sanna. Så, för att visa att ett argument är giltigt antar vi att alla premisser är sanna och slutsatsen falsk. Om detta antagande leder till en motsägelse, kan vi sluta oss till att resonemanget är giltigt. För mer information om de semantiska tablåsystem som används i den här uppsatsen, se Rönnedal (2015), (2012b). O, P och F är satsoperatorer som tar satser som argument och ger satser som värde. OA läses ”Det är obligatoriskt att A” eller ”Det bör vara fallet att A”, PA läses ”Det är tillåtet att A”, FA läses ”Det är förbjudet att A”. I den här uppsatsen bortser vi dock från att dessa system är inbäddade i en temporal dimension. Detta förenklar framställningen. Notera också att vi använder ”aktualistiska” kvantifikatorer i den här uppsatsen om inget annat sägs; $\exists$ och $\forall$ varierar över existerande entiteter.

Betrakta argument 1. Med hjälp av Davidsons analys kan denna slutledning symboliseras på följande sätt:

Formalisering av argument 1
$O\neg\exists xRdx$ (Du bör inte röka.)
$O\neg\exists x(Rdx \land Ibx)$ (Du bör inte röka i den här byggnaden.)

Individtermen d refererar till dig, b refererar till den här byggnaden, Ryx läses ”x är en handling som består i att y röker”, och Iyx läses ”x utförs i y”. Följande informella resonemang visar att detta argument är giltigt. OA är sann i en möjlig värld om och endast om A är sann i alla deontiskt tillgängliga världar. Antag att $O\neg\exists xRdx$ är sann i den aktuella världen @. Då är $\neg\exists xRdx$ sann i alla världar som är tillgängliga från @. Tag en godtycklig sådan värld w. Då är $\neg\exists xRdx$ sann i w. Alltså är $\neg\exists x(Rdx \land Ibx)$ sann i w [med hjälp av klassisk (fri) predikatlogik]. Eftersom w var godtycklig, gäller detta för alla världar tillgängliga från @, dvs. $\neg\exists x(Rdx \land Ibx)$ är sann i alla @-tillgängliga världar. Det följer att $O\neg\exists x(Rdx \land Ibx)$ är sann i @. Alltså är argument 1 giltigt.

Betrakta argument 8.

Formalisering av argument 8
$F\exists x(Rdx \land Irx)$ (Det är förbjudet att du röker i den här restaurangen.)
$F\exists xRdx$ (Det är förbjudet att du röker.)

Ryx, Iyx och d tolkas som ovan, r refererar till den här restaurangen. Följande modell visar att detta argument inte är giltigt. W är mängden av alla möjliga världar och D är individdomänen. $W = \{w_0, w_1\}$. w_1 är deontiskt tillgänglig från w_0. $D = \{d, c, r\}$ och alla entiteter existerar i båda världarna. Rdc är sann i w_1, Irc, Rdd och Rdr är falska i w_1. Alltså är $\neg\exists x(Rdx \land Irx)$ sann i w_1. Det följer att $F\exists x(Rdx \land Irx)$ är sann i w_0. Eftersom Rdc är sann i w_1 och c existerar i denna värld, så är ∃xRdx sann i w_1. Det följer att F∃xRdx är falsk i w_0. Alltså är premissen sann i w_0, men slutsatsen falsk. Det följer att argument 8 är ogiltigt.

Argument 2 kan nu formaliseras på följande sätt.

Formalisering av argument 2
F∃xDdgx (Det är förbjudet att du dränker din granne.)
F∃x(Ddgx ∧ Ppx) (Det är förbjudet att du dränker din granne i din grannes pool.)

Dyzx läses ”x är en handling som består i att y dränker z”, Pyx läses ”x utförs i y”, d refererar till dig, g refererar till din granne, och p refererar till din grannes pool. Följande semantiska tablå visar att detta argument är giltigt.

F∃xDdgx, 0
¬F∃x(Ddgx ∧ Ppx), 0
O¬∃xDdgx, 0
P∃x(Ddgx ∧ Ppx), 0
0s1
∃x(Ddgx ∧ Ppx), 1
¬∃xDdgx, 1
∀x¬Ddgx, 1
Ec, 1
Ddgc ∧ Ppc, 1
Ddgc, 1
Ppc, 1
¬Ddgc, 1
*

Låt oss nu undersöka argument 9. Här följer en formalisering av denna slutledning.

Argument 9
¬P∃x(Pdbx ∧ Igx) (Det är inte tillåtet att du parkerar din bil på den här gatan.)
¬P∃x(Pdbx ∧ ∃yIyx) (Det är inte tillåtet att du parkerar din bil någonstans.)

Pyzx läses ”x är en handling som består i att y parkerar z”, Iyx läses ”x sker på y”, d refererar till dig, b till din bil, och g till den här gatan. Följande modell visar att detta argument inte är giltigt. W = {w_0, w_1}, w_1 är deontiskt tillgänglig från w_0. D = {b, c, d, e, g}, c och e existerar i w_1; inga individer existerar i w_0. Pdbc och Iec är sanna i w_1, Igc och Pdbe är falska i w_1. Eftersom Pdbe är falsk i w_1 är Pdbe ∧ Ige falsk i w_1. Eftersom Igc är falsk i w_1 är Pdbc ∧ Igc falsk i w_1. Alltså är ¬∃x(Pdbx ∧ Igx) sann i w_1. För c och e är de enda individer som existerar i w_1. Det följer att ¬P∃x(Pdbx ∧ Igx) är sann i w_0. Eftersom Iec är sann i w_1 och e existerar i w_1 är ∃yIyc sann i w_1. Alltså är Pdbc ∧ ∃yIyc sann i w_1. Det följer att ∃x(Pdbx ∧ ∃yIyx) är sann i w_1. För c existerar i w_1. Alltså är ¬P∃x(Pdbx ∧ ∃yIyx) falsk i w_0. Premissen är alltså sann i w_0 och slutsatsen falsk. Det följer att argument 9 inte är giltigt.

Vi fortsätter med att analysera argument 3.

Formalisering av argument 3
P∃x(Rdx ∧ Irx) (Det är tillåtet att du röker i den här rökrutan.)
P∃xRdx (Alltså är det tillåtet att du röker.)

Ryx och d tolkas som ovan. Iyx läses ”x utförs i y” och r refererar till den här rökrutan. Följande semantiska tablå visar att detta argument är giltigt.

P∃x(Rdx ∧ Irx), 0
¬P∃xRdx, 0
O¬∃xRdx, 0
0s1
∃x(Rdx ∧ Irx), 1
¬∃xRdx, 1
∀x¬Rdx, 1
Ec, 1
Rdc ∧ Irc, 1
Rdc, 1
Irc, 1
¬Rdc, 1
*

Låt oss gå igenom ytterligare ett par argument. Argument 5 kan, om Davidsons analys är korrekt, symboliseras på följande sätt.

Formalisering av argument 5

$\neg P\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx)$ (Det är inte tillåtet att du parkerar din bil någonstans.)
$\neg P\exists x(Pdbx \wedge Sgx)$ (Alltså är det inte tillåtet att du parkerar din bil på den här gatan.)

Detta argument är giltigt om vi tolkar kvantifikatorerna possibilistiskt, vilket visas av nedanstående semantiska tablå.

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg P\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg\neg P\exists x(Pdbx \wedge Sgx), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{O\neg\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{P\exists x(Pdbx \wedge Sgx), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{0s1} \\
\multicolumn{2}{c}{\exists x(Pdbx \wedge Sgx), 1} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx), 1} \\
\multicolumn{2}{c}{\forall x\neg(Pdbx \wedge \exists ySyx), 1} \\
\multicolumn{2}{c}{Pdbc \wedge Sgc, 1} \\
\multicolumn{2}{c}{Pdbc, 1} \\
\multicolumn{2}{c}{Sgc, 1} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(Pdbc \wedge \exists ySyc), 1} \\
\swarrow & \searrow \\
\neg Pdbc, 1 & \neg\exists ySyc, 1 \\
* & \forall y\neg Syc, 1 \\
 & \neg Sgc, 1 \\
 & *
\end{array}$$

Tolkas kvantifikatorerna aktualistiskt, är dock ovanstående tablå inte korrekt och argumentet ogiltigt. Det sista steget på den högra grenen är inte tillåtet. Om vi använder aktualistiska kvantifikatorer, kan vi addera $\neg Sgc, k$ till en öppen gren om vi har $\forall y\neg Syc, k$ och Eg, k på denna gren; men det kan vi inte göra om vi bara har $\forall y\neg Syc, k$. Vi måste så att säga först veta att g existerar i k. Det här är ett problem eftersom argumentet är intuitivt giltigt och eftersom det är osäkert om det är rimligt att tolka kvantifikatorerna possibilistiskt i våra symboliseringar.

Om vi antar att ett ting endast kan ha en egenskap i en möjlig värld om det existerar i denna värld, så blir argumentet giltigt. Vi kan då från $Sgc, 1$ sluta oss till $Eg, 1$, och med hjälp av denna nod och $\forall y\neg Syc, 1$ härleda $\neg Sgc, 1$, och sluta den högra grenen. Det enda sättet att göra argumentet giltigt om vi vill använda aktualistiska kvantifikatorer och hålla fast vid den aktuella symboliseringen utan att göra detta antagande, tycks vara att lägga till vissa implicita premisser.

Det tycks finnas två sätt att göra detta. Vi kan lägga till premissen att den här gatan existerar och att den existerar med nödvändighet. Med denna premiss blir argumentet giltigt. Det är knappast logiskt nödvändigt att den här gatan existerar, men det kan vara historiskt nödvändigt. Givet att den faktiskt existerar är det rimligt att anta att det också är historiskt nödvändigt att den existerar. Vi kan också visa att argumentet är giltigt om vi lägger till den implicita premissen att det är nödvändigt att om du parkerar din bil på den här gatan, så parkerar du din bil någonstans. Och denna premiss förefaller vara intuitivt mycket rimlig. Nedanstående tablå bevisar detta.[3]

$$\begin{gathered}
\neg P\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx),\ 0\\
\Box(\exists x(Pdbx \wedge Sgx) \rightarrow \exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx)),\ 0\\
\neg\neg P\exists x(Pdbx \wedge Sgx),\ 0\\
P\exists x(Pdbx \wedge Sgx),\ 0\\
O\neg\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx),\ 0\\
0s1\\
\exists x(Pdbx \wedge Sgx),\ 1\\
\neg\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx),\ 1\\
0r1\\
\exists x(Pdbx \wedge Sgx) \rightarrow \exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx),\ 1\\
\exists x(Pdbx \wedge \exists ySyx),\ 1\\
*
\end{gathered}$$

Liknande problem uppstår då vi försöker analysera argument 4, 6 och 7. Här är en symbolisering av argument 7.

> Formalisering av argument 7
>
> $\neg P\exists x(\exists yPdyx \wedge \exists zSzx)$ (Det är inte tillåtet att du parkerar någonting någonstans.)
>
> $F\exists x(Pdbx \wedge Sgx)$ (Det är förbjudet att du parkerar din bil på den här gatan.)

---

[3] Vi ”förutsätter” i denna slutledning att den deontiska tillgänglighetsrelationen är inkluderad i den aletiska tillgänglighetsrelationen.

Detta argument är inte giltigt om kvantifikatorerna tolkas aktualistiskt, men det är giltigt om kvantifikatorerna tolkas possibilistiskt, vilket nedanstående semantiska tablå bevisar.

$$
\begin{array}{c}
\neg P\exists x(\exists yPdyx \wedge \exists zSzx),\ 0 \\
\neg F\exists x(Pdbx \wedge Sgx),\ 0 \\
O\neg\exists x(\exists yPdyx \wedge \exists zSzx),\ 0 \\
P\exists x(Pdbx \wedge Sgx),\ 0 \\
0s1 \\
\exists x(Pdbx \wedge Sgx),\ 1 \\
\neg\exists x(\exists yPdyx \wedge \exists zSzx),\ 1 \\
\forall x\neg(\exists yPdyx \wedge \exists zSzx),\ 1 \\
Pdbc \wedge Sgc,\ 1 \\
Pdbc,\ 1 \\
Sgc,\ 1 \\
\neg(\exists yPdyc \wedge \exists zSzc),\ 1 \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\neg\exists yPdyc,\ 1 & \neg\exists zSzc,\ 1 \\
\forall y\neg Pdyc,\ 1 & \forall z\neg Szc,\ 1 \\
\neg Pdbc,\ 1 & \neg Sgc,\ 1 \\
* & *
\end{array}
\end{array}
$$

Använder vi aktualistiska kvantifikatorer kan vi bevisa att argumentet är giltigt t.ex. om vi lägger till den implicita premissen att det är nödvändigt att om du parkerar din bil på den här gatan, så parkerar du någonting någonstans.

Övriga argument bevisas på liknande sätt. Att argument 10 inte är giltigt bevisas på samma sätt som ovan.

Om Davidsons analys av handlingssatser är riktig, kan vi alltså förklara alla intuitioner om argumenten i avsnitt 2. Om vi inte kan använda possibilistiska kvantifikatorer, tycks det förvisso som om vi måste lägga till vissa implicita premisser. Men dessa premisser förefaller vara intuitivt rimliga. Diskussionen pekar på behovet av en kvantifierad deontisk logik och visar också att Davidsons analys är fruktbar. Faktumet att Davidsons analys på ett smidigt sätt kan kombineras med deontisk logik är ytterligare en anledning att ta denna analys på allvar.

5. Slutsats

Jag har i den här uppsatsen undersökt så kallade platsbestämda normer. En platsbestämd norm är en norm som är knuten till en viss ort eller ett visst geografiskt område. Normer av detta slag uttalar sig om vad som bör, får och inte får vara fallet på olika ställen. Juridiska förbud, tillåtelser och plikter är ofta av detta slag, men moraliska föreskrifter tycks också kunna vara relaterade till specifika platser. Jag gick igenom Donald Davidsons analys av så kallade handlingssatser och visade hur denna analys kan användas för att förstå den logiska formen hos platsbestämda normer. Enligt Davidson kvantifierar vi ”implicit” över handlingar i våra handlingssatser. Diskussionen pekar därför på behovet av en kvantifierad deontisk logik. Jag tog upp ett antal argument som innehåller påståenden om plikter, tillåtelser och förbud som alla på något sätt är kopplade till vissa platser. En del av dessa är intuitivt giltiga medan andra är intuitivt ogiltiga. Jag visade hur man kan använda en kvantifierad deontisk logik för att förklara dessa intuitioner. Om resonemangen i den här uppsatsen är riktiga, så har vi lyckats presentera en analys av den logiska formen hos platsbestämda normer som har intuitivt rimliga konsekvenser. Diskussionen ger stöd åt uppfattningen att Davidsons analys är plausibel och visar också att de logiska system som utvecklas i Rönnedal (2015) är filosofiskt relevanta.

Mer skulle kunna sägas om alla ämnen i den här uppsatsen, kanske framför allt om analysen av de argument som innehåller uttrycket ”någonstans”. Det vore också önskvärt att säga något mer generellt om hur olika platsbestämda normer förhåller sig till varandra. Jag hoppas kunna återkomma till ämnet vid ett senare tillfälle.

Referenser

Davidson, D. (1967). The Logical Form of Action Sentences. I N. *Rescher* (red.) (1967), ss. 81-95.

Davidson, D. (2001). *Essays on Actions and Events*. Oxford: Oxford University Press.

Glüer, K. (2011). *Donald Davidson: A Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press.

Lepore, E. & Ludwig, K. (red.) (2013). *A Companion to Donald Davidson*. Wiley Blackwell.

Ludwig, K. (red.) (2003). *Donald Davidson*. Cambridge University Press.

McCann, H. J. (2013). Action Individuation. I *E. Lepore & K. Ludwig* (red.) (2013), ss. 48-61.

Pietroski, P. M. (2013). Event Variables and Their Values. I *E. Lepore & K. Ludwig* (red.) (2013), ss. 93-125.

Rescher, N. (red.) (1967a). *The Logic of Decision and Action*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

Rönnedal, D. (2012). Bimodal Logic. *Polish Journal of Philosophy*. Vol. VI, No. 2, Fall 2012, ss. 71-93.

Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.

Rönnedal, D. (2015). Quantified Temporal Alethic-Deontic Logic. *Logic and Logical Philosophy*. Vol 24, No 1 ss. 19-59. DOI:10.12775/LLP.2014.016. Publicerad online 2014.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Frowe's Machine Cases

William Simkulet

Abstract
Helen Frowe (2006/2010) contends that there is a substantial moral difference between killing and letting die, arguing that in Michael Tooley's infamous machine case it is morally wrong to flip a coin to determine who lives or dies. Here I argue that Frowe fails to show that killing and letting die are morally inequivalent. However, I believe that she has succeeded in showing that it is wrong to press the button in Tooley's case, where pressing the button will change who lives and dies. I argue that because killing and letting die are morally equivalent we have no reason to press the button in the machine case. Pressing the button in this case is morally wrong because there is no reason to do it; to press the button is to treat matters of life and death irreverently.

Introduction

In Helen Frowe's "Killing John to Save Mary: A Defense of the Moral Distinction between Killing and Letting Die," she argues that there is a substantial moral difference between killing and letting die. She sets out to demonstrate the difference by analyzing Michael Tooley's machine case:

> 1. *Machine* – Two children – John and Mary – have been placed inside two chambers in a machine. Between the two chambers is a canister of poison gas that will shortly be released into Mary's chamber. However, if a passerby presses a button on the machine, the gas will be released into John's chamber instead.[1]

---

[1] For the original version of this case, see Tooley (1980). For the purposes of each case discussed in this paper assume the agents involved are infallible about the consequences of their actions unless otherwise noted.

Filosofiska Notiser, Årgång 2, Nr. 2, September 2015, 93-104

Tooley infamously contends that because killing and letting die are morally equivalent[2], the passerby ought to flip a coin to decide whether to press the button. Frowe argues that the passerby shouldn't press the button, nor should he flip a coin to decide whether to press the button because (1) there is a significant moral difference between killing and letting die (killing is worse) and (2) pressing the button would be a case of redirecting harm from one person to another – from Mary to John – and thus pressing the button is worse than doing nothing. Frowe argues that it is only acceptable to redistribute harm to others if they have what she calls "a "fair chance" to avoid being at risk of harm." (59) Frowe constructs a series of cases that she believes illustrates these two points.

This paper is divided into three sections. In the first, I look at Frowe's argument that killing and letting die are inequivalent. I argue that Frowe fails to show that there is a morally significant difference between killing and letting die. In the second, I look at Frowe's theory of redirecting harm, and argue that it is inconsistent with our commonsense moral intuitions regarding self-defense. Despite this, I contend that Frowe has given us the tools to show that pressing the button in the machine case is morally wrong regardless of whether killing and letting die are equivalent. In the third section I argue that if killing and letting die are morally equivalent, then the outcome of pressing the button is morally equivalent to the outcome of not pressing the button. As the outcomes are (by assumption) equivalent - either Mary dies or John dies - the agent lacks any moral reason to intervene. To press the button, then, is at least *prima facie* morally wrong because it is a waste of time and effort. Furthermore, there is another reason why we shouldn't press the button - or flip a coin - in this case - it treats matters of life and death irreverently.

I. On Killing and Letting Die

To illustrate the difference between killing and letting die, Frowe compares the following two cases:

> *2. Disease* – Both John^D and Mary^D have a fatal disease. Their doctor has a single dose of the antidote. “Neither John nor Mary has any prior claim upon the antidote.” (Frowe, 57)

---

[2] To use James Rachels' terminology, all else being equal there are the same reasons against killing as there are letting die, and thus killing and letting die are morally equivalent. See Rachels (1975), (1979), (2001).

> *3. Diseased Mary* – Mary^{DM} has a fatal, non-communicable disease. She is trapped in a room with John^{DM} (sedated) and the instructions and materials necessary to make the cure – a gas poisonous to those without the disease. She will die before help arrives to free either of them from the room.

Frowe contends that in *Disease*, "one ought to toss a coin" to determine who lives; but in *Diseased Mary* "one should not toss a coin to see whether Mary can permissibly [kill] John." (57) There are two problems with comparing these cases to the machine case - (1) flipping the coin plays a different role in *Machine* than it does in *Disease*, and (2) *Diseased Mary* differs from *Disease* in that there is no impartial third party.

For Tooley, in *Machine*, the passerby finds himself caught in a Buridan's ass-type situation. He believes that all life is precious, and after examining the machine and trying to see if he can free both of the children, he concludes that there are only two options - (a) press the button (kill John, save Mary) or (b) not press the button (let Mary die, let John live). For Tooley, the coin flip serves as an *ad hoc* subjectively-indeterministic tie-break to free the passerby from his indecision. Tooley's passerby believes that both options are morally equivalent, and yet he has to choose between the two (otherwise he'd be stuck, unable to make a choice, like Buridan's Ass was said to be stuck indefinitely between two equally appetizing options, unable to choose between them).

In contrast, in *Disease*, for Frowe, flipping the coin is used as a fair and impartial means to determine who gets the antidote. John^{D} and Mary^{D} are equally deserving, but only one can get the antidote. Here the coin flip serves as an *ad hoc* subjectively-indeterministic tie-breaker, but unlike in Tooley's case, the coin flip is supposed to makes the outcome fair.

To illustrate this difference, suppose two passersby pass by Tooley's machine. The first finds herself equally drawn to pressing the button and not pressing it, and flips a coin to decide what she will do. Let's say she presses the button, redirecting the harm from Mary to John. The second passerby also flips a coin, then flips the switch redirecting the harm back from John to Mary. If the coin flip is an indeterministic means of breaking her mental stalemate, the first passerby might notice the second pressing the button - undoing her work - but she would have no reason to be offended or to go back and press the button again.

In contrast, suppose two doctors enter the room in *Disease*. For Frowe, the coin flip determines the just outcome. If a second doctor stopped the administration of the antidote and flipped a second coin, then gave it to the winner of the second coin flip rather than the first, this would be considered unfair and the first doctor would have a moral reason to intervene.

The second problem with Frowe's analysis turns on the fact that *Diseased Mary* is unlike the previous two cases in that there is no impartial third party. Coin-flips in both *Machine* and *Disease* were used by impartial third parties to guide their actions. Here Mary is not an impartial third party. The relevant question here is whether Mary is morally justified to kill in self-defense. Commonsense ethics, and many normative ethical theories, seem to hold that it is morally acceptable for innocent persons to kill other innocent persons in self-defense. Although such cases are rare, it is generally accepted that when all else is equal, we can put our own well-being ahead of that of others. Mary is justified in creating the cure that will incidentally kill John in *Diseased Mary* because she is acting in self-defense. For Frowe's purposes, though, we need a revised case:

> *3a. Diseased Mary in the Machine* – John^{DMM} and Mary^{DMM} – have been placed inside two chambers in a machine separated by a thin plastic wall. Mary^{DMM} has a fatal, non-communicable disease. In John^{DMM}'s chamber are all of the instructions and materials for making the cure – a gas fatal to those without the disease. By pressing a button on the machine, a passerby can dissolve the plastic wall between the two chambers.

Unlike *Diseased Mary*, this case is not a case of self-defense.

Frowe says "One way that we can explain the difference between *Disease* and *Diseased Mary* is by thinking about the courses of action that we could justify to John." (57) There are two substantive flaws with this stance. First, if we're interested in justifying our potential actions, we should be equally interested in justifying them to Mary as we are in justifying them to John.

Second, there is a substantive difference between justifying an act and justifying an act to John; the latter seems to imply that we need John's permission to morally engage in the act - in this case putting John in danger - but I suspect many wouldn't be inclined to consent to being put in danger, even if doing so was morally acceptable. For example, most people believe that killing in self-defense is morally acceptable - especially killing vicious agents who freely put your life at risk. Suppose a vicious murderer kidnaps you and locks you in a cage deep in his basement and that, while readying his weapons, he explains that he is going to kill you. It occurs to you, however, that you might be able to save yourself if you kill him first. It would be quite absurd to suggest that you would need to be able to (counterfactually) justify your act of self-defense to the killer in order to kill in self-defense.

Most moral philosophers would have no trouble justifying the right to kill in self-defense, but it is a radically different question whether or not such a justification would be sufficient to justify it to the killer. Whether we can justify our action to the killer is irrelevant to whether or not we can kill the killer in self-defense.

In *Disease*, Frowe contends both John and Mary would consent to a coin flip deciding their fate; but that “In *Diseased Mary* John has no reason to agree to a third party’s tossing a coin to decide whether Mary can manufacture the gas.” (58) It's not clear that a third party has any bearing over Mary's actions in *Diseased Mary*, so for our purposes Frowe would contend that in *Diseased Mary in the Machine* John would have no reason to agree to the passerby's tossing a coin to decide whether to press the button. Still, this line of reasoning raises three problems.

First, it's not clear that Mary and John wouldn't advocate for some other *ad hoc* arbitrary decision making convention, such as "first-come, first served," the outcome of a game of checkers, etc. If we stipulate Mary and John are rational, self-interested individuals, then there's no reason to think they'd consent to a truly impartial decision making method at all - they'd prefer the method that would give them the best chance to live. This illustrates an important unparallel between Frowe's analysis of *Disease* and *Diseased Mary* - Mary's interests aren't consulted in the latter, and thus Frowe puts Mary at a disadvantage.

This unparallel is the second problem with Frowe's analysis. Here, Frowe seems to be begging the question - assuming that there is a morally relevant difference between killing and letting die, such that our actions need to be justified to John more so than Mary, because we'd be killing John, but merely letting Mary die. However, killing and letting die each affect the dying equally, so if we're interested in justifying our actions, we should be interested in what justification the passerby in *Diseased Mary in the Machine* could give to both parties to justify treating them unequally, to justify letting the person who put them in the machine decide their fate, or to justify letting luck (the flipping of a coin) decide who lives and who dies. Frowe contends pressing the button cannot be justified to John, but certainly his inaction would be comparably uncomforting for Mary!

Third, Frowe's reliance on justification here seems inherently misguided - in some cases, John might agree to be killed to save Mary's life. Perhaps John is altruistic, perhaps he's suicidal. If John's consent matters here, this is morally relevant, such that Frowe should at least consider that in some cases killing might be preferable to letting die - when one has the consent of both parties.

II. On Redirecting Harm

Killing is wrong in *Machine*, Frowe contends, because it is redirecting harm to John “and John is not part of the lethal sequence of events that threatens Mary’s life.” (58) Frowe contends that it is not always wrong to redirect harms; she says doing so would be acceptable in cases like the following:

> *4. Body Armor* – Aggressor shoots at Victim. Bystander is nearby and can protect herself by putting on body armor, but refuses “because protective clothing is unflattering.” (58-59) Victim can save himself only by deflecting a bullet towards Bystander.[3]

The relevant difference between *Body Armor* and *Machine*, she contends, is that Bystander had a prior chance to avoid even the risk of harm. Frowe contends “If the bystander had no chance to avoid her position… it is impermissible to kill [her] in… self-defense.” (59) This suggests that if the bystander had a chance to avoid putting herself in harm's way and failed to do so (whether intentionally or negligently), then it may be acceptable to kill her in self-defense.

By the same token, if there is no morally relevant difference between killing and letting die, then in *Diseased Mary*, Mary^{DM} may be justified in acting to save her own life in such a way that will unintentionally kill John^{DM} if John^{DM} had previously had a chance to avoid being trapped in the room. Notably Frowe does not specify whether John^{DM} could have avoided being locked in the room with Mary^{DM}.

I agree that Victim would have different moral obligations towards a negligent Bystander than towards a virtuous Bystander; however her account in *Body Armor* is still radically inconsistent with our commonsense intuitions regarding killing in self-defense. Consider:

---

[3] For the purposes of this and the following case, bullets are always lethal.

> *4a. No Body Armor* – Aggressor^A shoots at Victim^A with his last bullet. Bystander^A is nearby – wrong place, wrong time. Victim^A can save himself only by deflecting a bullet towards Bystander^A.

While tragic, my intuition is that Victim^A is morally justified in acting in self-defense, even at the possible cost of an innocent person's life. (Of course Victim^A might, like John, justifiable choose to put the life of others ahead of his own, but this isn't required.) Self-defense cases are generally problematic because even those committed to the view that everyone's life is morally equivalent tend to have strong intuitions in favor of putting one's own life ahead of others in self-defense cases. One explanation is that (innocent) persons have a right to self-defense. Insofar as rights go, this one seems straightforward enough. Assuming moral agents have a right to life, in cases of scarcity and conflict there is a *prima facie* moral obligation to act to prevent conflict; but when there is no other course, killing in self-defense is *prima facie* morally acceptable.

However, because I am generally leery of rights-talk, an alternate explanation for why we are morally justified in choosing to preserve ourselves over others turns on our privileged access to our private mental states and moral history. For the moment, let's assume Victim^A is a generally good person. If this is the case, all else being equal, Victim^A has more reason to believe he is innocent than a stranger, and because he is morally obligated to favor innocent persons over villainous ones, he is obligated to favor himself over Bystander^A. This does not mean that Victim^A doesn't have any moral obligations to Bystander^A. If Victim^A has the option to either deflect the bullet and certainly kill Bystander^A or deflect it in such a way it would kill no one, all else being equal he is morally obligated to do the latter. Frowe contends that this kind of obligation would be lesser for "willing bystanders" in the same position as the one in *Body Armor* – but it would be quite odd if Frowe thinks that the killing would only be justified in terms of the relatively minor moral failing of being negligent. It's certainly not something that you can reliably justify to the negligent bystander, who - much like John - would probably vote against any action that would result in his death.

I think the privileged access account above is superior to the rights-based account because it explains our intuitions in rare cases where self-defense comes at a steep price. Consider the following case:

> *4b. Impending Nuclear Armageddon* – Terrorists have hacked into a nuclear armed submarine, and have aimed the missiles at a large number of highly populated targets. The only way to stop these missiles from launching is to activate the convenient new "self-destruct" system that responds to the captain's voice. As the captain begins uttering the self-destruct code, Ricky (a reporter covering the submarine) decides that he doesn't want to die and realizes that he can use his microphone cord to strangle the captain, preventing him to blowing up the ship, saving his life at the cost of millions of others.

According to the rights-based theory, it is morally acceptable (but not obligatory) for Ricky to kill the captain. However, according to the privileged access theory, because Ricky has overwhelming evidence that killing the captain will result in the deaths of many innocent persons, it is unacceptable to do so. Though, this is not to say that it is morally unacceptable to risk the lives of immoral persons to save yourself; consider this variation of *Body Armor*

> *4c. Willing Spectators* – Sparky has been enslaved and forced to fight in the Coliseum in front of legions of fight fans fully aware and apparently indifferent to the fact that he has been enslaved. One day, a lion lunges at Sparky, who has to choose whether to let the lion maw him, or to deflect the lion into the stands where he will no doubt kill many spectators.

Just as Frowe thinks it is justifiable to deflect a bullet in *Body Armor*, I think it is acceptable to deflect the lion in *Willing Spectators*. Even if the immoral actions of the spectators are not worthy of death, I think their immoral action absolves Sparky – and us – from having to worry about their well-being in such a case. They might not have deserved to be killed, but they did fail, morally. In contrast, in *Diseased Mary*, even if it is morally acceptable for Mary to kill John to save her own life, she shouldn't be happy about it.

I have the strong intuition it is acceptable to kill in *No Body Armor*, but Frowe argues it is wrong to deflect harm onto innocents. Still, I suspect she would conclude it is morally acceptable to kill innocents who are the sources of possible harm to you, for example virtuous soldiers on opposing sides during war. It strikes me as odd that it would be acceptable to kill innocent persons trying to fulfill their moral obligations, but not innocent persons in the wrong place at the wrong time. However, Frowe contends that it is acceptable to deflect the bullet in *Body Armor* solely because of Bystander's moral failing, and contends it is never morally acceptable to kill "bystanders" (those who have not initiated a threat) in self-defense. Believing this, she turns to her penultimate case:

> 5. *Armed Machine* – John^{AM} and Mary^{AM} – have been placed inside two chambers in a machine. Mary^{AM} will be killed unless a passerby presses the button. If the button is pressed, John^{AM} will be killed in her stead. Their kidnapper has armed John^{AM} and Mary^{AM} with modified automatic-weapons fixed to the outside of the machine. The trustworthy kidnapper tells them that one of the weapons is loaded with live ammunition, and one is loaded with blanks, and that the weapons can only fire on a warm heat signature of a human being.

Frowe contends that John^{AM} would be morally justified in firing on the passerby if he tried to press the button because his trying to press the button would be a threat. Although killing the passerby would get Mary^{AM} nothing, Frowe asks whether Mary^{AM} might be justified in shooting him in the knee and promising further force if he doesn't press the button. If Mary^{AM}'s action is justified, Frowe says, "we are committed to the implausible claim that one may use seriously harmful means to force a person to come to one's aid at the cost of an innocent person's [John^{AM}'s] life." (61) While regrettable, I don't find this implausible. Indeed, this is what I contend is acceptable in *No Body Armor;* that one is morally justified in acting in self-defense even at the cost of the life of an innocent person.

If Mary^{AM} is not justified in using this force, Frowe contends, it supports the view that there is a substantial difference between killing and letting die. (61) She goes on to say "… that you may not do *as much* against someone who refuses to save you as you may do against someone who is going to kill you is sufficient to support the killing/letting die distinction." This is just bizarre; consider a variation of *Armed Machine*:

> 5a. *Solo Machine* – Mary^{SM} has been placed inside a machine that will release poison gas into her chamber when the clock hits zero unless someone presses a button. This is all very obvious to Mary and anyone who would pass her by. Her captors have given Mary a machine gun.

Suppose a numbers of passersby see Mary^{SM}'s plight, see that it is easy for them to save her life, and freely choose not to do so. Certainly Mary^{SM} is morally justified in both threatening to kill bystanders who would let her die, as well as following through with her threat if they fail to save her life - especially if doing so might make other bystanders press the button. The very notion that a passerby might witness Mary^{SM}'s plight and do nothing is morally abhorrent!

In *Solo Machine*, it seems that we *can* do as much against someone who refuses to save you as you may do against someone who is going to kill you - that is to say that there is no support for the killing/letting die distinction. The difference between *Solo Machine* and *Armed Machine* is that the passersby who freely let Mary die when saving her life would cost them next to nothing are uncontroversially moral monsters, while the passerby in *Armed Machine* certainly does not exhibit the same disregard for human life. If Mary is unjustified in acting in *Armed Machine*, surely it is because the character of her targets is different - they're not *clear* moral monsters for not killing an innocent person to save her life, where as in *Solo Machine* they would be clear moral monsters for letting her die for no reason.

III. Killing Arbitrarily

Frowe's final case, I think, has the most merit:

> 6. *Blind Machine* – A passerby comes across a machine in which two children have been placed inside separate chambers. A canister of gas is hidden out of view above one of the chambers. Pressing the button will change the chamber it is aimed at.

There is no good reason to press the button here, as the passerby cannot tell who he will be killing and saving. *Blind Machine* illustrates the futility of flipping a coin in *Machine*. Because John and Mary are morally equivalent in *Machine*, there is nothing that the passerby can do that could bring about a morally different outcome. To press the button is to waste the passerby's effort, and perhaps to cause additional psychological harm to those trapped in the machine.

Blind Machine doesn't let Frowe help herself to the conclusion that killing is worse than letting die; pressing the button in *Blind Machine* is wrong because there is no reason to do so, and thus to press the button is to act irrationally and wastefully. Furthermore, pressing the button might cause additional harm and suffering to those in the machine. Tooley’s position isn’t that killing and letting die are always morally equivalent, but that *all else being equal,* killing and letting die are morally equivalent. All *Blind Machine* has demonstrated is that *Machine* doesn’t quite make everything else equivalent.

Suppose, though, that the passerby presses the button in *Blind Machine*. And suppose that she does it often because she likes having control over who lives and dies. This, it strikes me, is morally abhorrent because the passerby is making life or death decisions without regard to morality; her actions aren't done for moral reasons, rather they're done in wanton defiance of morality. This is a particularly egregious form of willful negligence, what we might call "playing God" because it involves carelessness with matters great importance - of life and death. I think it is uncontroversially true that this passerby acts immorally, and is severely morally blameworthy for her actions. Note that the actual or expected consequences of her actions are irrelevant to explaining what's wrong with her choice. Suppose that she presses the button twice - the gas momentarily switches targets, but then switches back. This has no effect on the outcome, but the passerby is clearly morally blameworthy for her careless attitude towards the life and death of others.

Conclusion

We are now in a better position to explain what is wrong with pushing the button in Tooley's machine case. If moral agents have (libertarian) free will, then they're not like Buridan's ass - they can make (arbitrary) choices between two outcomes on their own without flipping a coin. (The doctors in *Disease*, while capable of making arbitrary choices, probably should use an impartial, observable decision making method to demonstrate that their decision was arbitrary.) We can sensibly say that the passerby has at least three options - press the button, don't press the button, or flip a coin to decide whether to press the button. If killing and letting die are morally equivalent, all three options have a morally equivalent outcome and we can't decide between them by consequences alone. Because pressing the button and flipping the coin involve some effort, the default circumstance - not pressing the button is preferable. To decide for any other reason is to make a decision based on irrelevant grounds and to treat matters of life and death as if they didn't matter - and this is morally abhorrent.

References

Frowe, Helen. (2006/2010). Killing John to Save Mary: A Defense of the Moral Distinction between Killing and Letting Die. In *Action, Ethics, and Responsibility*, Joseph Keim Campbell, Michael O'Rourke, and Harry S. Silverstein (editors), The MIT Press: 47-66.

Rachels, James. (1975). Active and Passive Euthanasia. *The New England Journal of Medicine*, Vol. 292, pp. 78-80.

Rachels, James. (1979). Killing and Starving to Death. *Philosophy*, Vol. 54, No. 208, pp. 159-171.

Rachels, James. (2001). Killing and Letting Die. *Encyclopedia of Ethics, 2nd edition*, ed. Lawrence Becker and Charlotte Becker (New York Routledge, 2001), vol. 2, pp. 947-50.

Tooley, Michael. (1980). An Irrelevant Consideration Killing VS Letting Die. In *Killing and Letting Die*, Bonnie Steinbock (editor), Prentice-Hall: 56-62.

William Simkulet
Cleveland State University
simkuletwm@yahoo.com